院、系领导 审批并签名		B 卷

广州大学 2017-2018 学年第二学期考试卷

参考解答及评分标准

课 程：高等数学Ⅱ2（32 学时）　　　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	15	15	8	14	10	16	6	16			100	
得 分												

警示：《广州大学授予学士学位工作细则》第五条：“考试作弊而被给予记过、留校察看或开除学籍处分并且被取消相应课程本次考试成绩的，不授予学士学位。”

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．平面 $x+2y-3z=6$ 在 z 轴上的截距 $c=$ __-2__.

2．极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}=$ __$1/2$__.

3．改换二次积分的积分次序：$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\underline{\int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x}$.

4．二元函数 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $(1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=\underline{2\,\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}y}$.

5．二阶微分方程 $y''+4y=0$ 的通解为 $y=\underline{C_1\cos 2x+C_2\sin 2x}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．点 $P(a,b,c)$ 关于 xOy 面对称的点 P' 的坐标是（ A ）.

（A）$(a,b,-c)$　（B）$(-a,b,c)$　（C）$(-a,-b,c)$　（D）$(-a,-b,-c)$

2．设二元函数 $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^2}$，则（ B ）.

（A）$f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 都存在　（B）$f_x(0,0)$ 存在，但 $f_y(0,0)$ 不存在

（C）$f_x(0,0)$ 和 $f_y(0,0)$ 都不存在　（D）$f_y(0,0)$ 存在，但 $f_x(0,0)$ 不存在

3．设$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2\right\}$，则二重积分$\iint\limits_D(1+\sin xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$（ D ）．

（A）0 （B）2 （C）4π （D）2π

4．曲线上点$P(x,y)$处的法线与y轴的交点为Q，线段PQ被x轴平分，则曲线满足的微分方程为（ A ）．

（A）$2yy'+x=0$ （B）$xy'+2y=0$

（C）$2yy'-x=0$ （D）$xy'-2y=0$

5．利用极坐标$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$计算区域$D:x^2+y^2-2Ry\le 0(R>0)$上的二重积分时，极角$\theta$的取值范围是（ C ）．

（A）$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ （B）$\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ （C）$[0,\pi]$ （D）$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

三、（本题 8 分）

验证函数$z=\arctan\dfrac{x}{y}$满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+(\dfrac{x}{y})^2}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$， ------3 分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+(\dfrac{x}{y})^2}\cdot(-\dfrac{x}{y^2})=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$， ------5 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{y}{x^2+y^2})=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$， ------6 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}(-\dfrac{x}{x^2+y^2})=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$， ------7 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$. ------8 分

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1．设 $z=f\left(\sin x, xy\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$（其中 f 具有二阶连续偏导数）．

解：记 $u=\sin x, v=xy$，则 $z=f\left(u,v\right)$，------1 分

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'\cos x+yf_2'，\text{------4 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial f_1'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_1'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos x+f_2'+y\left(\frac{\partial f_2'}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\text{---6 分}$$

$$=(x\cos x)f_{12}''+f_2'+xyf_{22}''.\text{------7 分}$$

2．设 $z=z\left(x,y\right)$ 是由方程 $z^3-3xyz=x^3-y^3$ 所确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}$.

解：设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-x^3+y^3$，则

$$F_x=-3yz-3x^2，\ F_z=3z^2-3xy，\text{------3 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz+x^2}{z^2-xy}.\text{------5 分}$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入所给方程，得 $z=-1$，所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=1}}=-1.\text{------7 分}$$

五、（本题 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^3-6xy+3y^2+4$ 的极值.

解：解方程组

$$\begin{cases} f_x=3x^2-6y=0 \\ f_y=-6x+6y=0 \end{cases}，\text{------2 分}$$

得驻点 $(0,0)$，$(2,2)$. ------4 分

记 $A=f_{xx}=6x$，$B=f_{xy}=-6$，$C=f_{yy}=6$. ------6 分

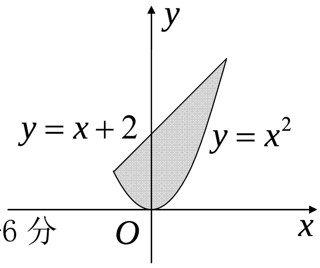
在点 $(0,0)$ 处，$AC-B^2=-36<0$，所以 $f(0,0)$ 不是极值；------7 分

在点 $(2,2)$ 处，$AC-B^2=36>0$，且 $A=12>0$，

所以 $f(2,2)=0$ 是极小值. ------10 分

六、解答下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

1．计算 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 所围成的闭区域.



解：抛物线与直线的交点为 $(-1,1)$ 和 $(2,4)$，------2 分

$$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x+2}xy\,\mathrm{d}y \text{------4 分}$$

$$=\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}(x^3+4x^2+4x-x^5)\,\mathrm{d}x \text{---6 分}$$

$$=\frac{45}{8}.\text{------8 分}$$

2．求以曲面 $z=2-x^2-y^2$ 为顶，圆 D：$x^2+y^2\le 1$ 为底的曲顶柱体的体积 V.

解：$V=\iint\limits_D (2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$------3 分

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho \text{------6 分}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{3}{4}\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi.\text{------8 分}$$

七、（本题 6 分）

设 $f(x)$ 连续，证明：$2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$.

证明：　右式 $=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$，------2 分

改换积分次序得

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\text{，------4 分}$$

由轮回对称性知

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\text{，------5 分}$$

所以

$$\text{右式}=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y=\text{左式}.\text{------6 分}$$

八、解答下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

1．求微分方程 $y'+y=(x+1)^2$ 的通解.

解：对应的齐次方程为 $y'+y=0$，其特征方程为 $r+1=0$，特征根为 $r=-1$，所以齐次方程的通解为 $Y=Ce^{-x}$. ------3 分

设原方程的特解为 $y_{\mathrm{p}}=ax^2+bx+c$，------5 分

$$y'_{\mathrm{p}}=2ax+b,$$

代入原方程得

$$2ax+b+(ax^2+bx+c)=x^2+2x+1$$

$$\Rightarrow\ a=1, b=0, c=1,$$ ------7 分

所以原方程的通解为

$$y=Y+y_{\mathrm{p}}=Ce^{-x}+x^2+1.$$ ------8 分

2．一曲线通过点 $(1,1)$，它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点所平分，求这一曲线方程.

解：由题设可知，曲线上点 (x,y) 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=-\frac{y}{x}.$$ ------3 分

分离变量得

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}\,y=-\frac{1}{x}\mathrm{d}\,x,$$

两边积分得

$$\ln y=-\ln x+C,$$ ------6 分

由曲线过点 $(1,1)$，得 $C=0$，所求曲线方程为

$$y=\frac{1}{x}.$$ ------8 分