院、系领导审批并签名		A 卷

广州大学 2017-2018 学年第一学期考试卷

参考解答及评分标准

课 程：高等数学Ⅱ1（64 学时）　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	总 分	评卷人
分 数	15	15	10	18	18	8	10	6	100	
得 分										

特别提醒：2017 年 11 月 1 日起，凡考试作弊而被给予记过（含记过）以上处分的，一律不授予学士学位。

一、填空题（本大题满分 15 分，每小题 3 分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{x}{n})^n=$ $\underline{\quad e^x \quad}$.

2．当 $x\to 0^+$ 时，与 $\cos\sqrt{2x}-1$ 是等价无穷小的幂函数为 $\underline{\quad -x \quad}$.

3．曲线 $y=x^4-4x-3$ 与 x 轴平行的切线方程为 $\underline{\quad y+6=0 \quad}$.

4．函数 $y=x^3-3x$ 的单调减少区间为 $\underline{\quad [-1,\ 1] \quad}$.

5．$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\right)=$ $\underline{\quad e^{\sqrt{x}} \quad}$.

二、选择题（本大题满分 15 分，每小题 3 分）

1．当 $x\to 0^+$ 时，下列变量为无穷大量的是（ D ）.

(A) $\dfrac{1}{x}\sin x$　　(B) $x\sin\dfrac{1}{x}$　　(C) $\dfrac{1}{\ln x}$　　(D) $\ln x$

2．$x=0$ 是函数 $f(x)=\dfrac{x}{|x|(x+1)}$ 的（ C ）.

(A) 连续点　　(B) 可去间断点　　(C) 跳跃间断点　　(D) 无穷间断点

3．设 $y=\sin x$，则 $y^{(100)}=$（ B ）．

(A) $\cos x$ (B) $\sin x$ (C) $-\cos x$ (D) $-\sin x$

4．曲线 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 的凸区间是（ D ）．

(A) $(-\infty,0]$ (B) $[0,+\infty)$ (C) $(-\infty,+\infty)$ (D) $(-\infty,0]$和$[0,+\infty)$

5．$\int_{-\infty}^{0}(\arctan\frac{x^2}{x-1})'\mathrm{d}x=$（ A ）．

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) $+\infty$ (D) $-\infty$

三、计算下列极限（本大题满分 10 分，每小题 5 分）

1．$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$ ------2 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^{-1}}+1}$ ------3 分

$=\frac{1}{2}$． ------5 分

2．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x\tan x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ ------2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$ ------4 分

$=\frac{1}{2}$． ------5 分

四、解答下列各题（本大题满分 18 分，每小题 6 分）

1．求函数 $y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$ 的导数和微分.

解： $y'=(\cos\dfrac{2x}{1+x^2})\cdot(\dfrac{2x}{1+x^2})'$ ------2 分

$$=(\cos\frac{2x}{1+x^2})\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}$$，------4 分

$$\mathrm{d}\,y=y'\,\mathrm{d}\,x=\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\cos\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}\,x$$．------6 分

2．设由方程 $x^3+(x-1)y+y^3=2$ 确定隐函数 $y=f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}$ 在 $x=1$ 处的值.

解：原方程两边对 x 求导，得

$$3x^2+y+(x-1)\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}+3y^2\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}=0$$，（*）------4 分

将 $x=1$ 代入原方程，解得 $y=1$，------5 分

再将它们代入（*）式，解得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x}\right|_{x=1,\,y=1}=-\dfrac{4}{3}$．------6 分

3．设 $f(x)=(x-a)g(x)$， $g'(x)$ 连续，求 $f''(a)$.

解： $f'(x)=g(x)+(x-a)g'(x)$， $f'(a)=g(a)$，------2 分

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)+(x-a)g'(x)-g(a)}{x-a}$$ ------3 分

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{g(x)-g(a)}{x-a}+g'(x)\right)$$，------4 分

由题设 $g'(x)$ 存在且连续知 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$， $\lim\limits_{x\to a}g'(x)=g'(a)$，

所以 $f''(a)=2g'(a)$．------6 分

五、计算下列积分（本大题满分 18 分，每小题 6 分）

1. $\int \dfrac{1}{x\sqrt{1+2\ln x}}\mathrm{d}x$.

解：原式$=\int \dfrac{1}{\sqrt{1+2\ln x}}\mathrm{d}(\ln x)$ ------2 分

$=\dfrac{1}{2}\int \dfrac{1}{\sqrt{1+2\ln x}}\mathrm{d}(1+2\ln x)$ ------4 分

$=\sqrt{1+2\ln x}+C$. ------6 分

2. $\int x\operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}x$.

解：原式$=\int \operatorname{arccot} x\,\mathrm{d}(\dfrac{x^2}{2})$ ------1 分

$=\dfrac{x^2\operatorname{arccot} x}{2}-\int \dfrac{x^2}{2}\cdot(-\dfrac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$ ------3 分

$=\dfrac{x^2\operatorname{arccot} x}{2}+\dfrac{1}{2}\int (1-\dfrac{1}{1+x^2})\mathrm{d}x$ ------4 分

$=\dfrac{1}{2}(x^2\operatorname{arccot} x+x-\arctan x)+C$. ------6 分

3. $\int_1^7 \dfrac{x-2}{\sqrt{2x+2}}\mathrm{d}x$.

解：令$t=\sqrt{2x+2}$，则$x=\dfrac{1}{2}(t^2-2)$，$\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$，------2 分

原式$=\int_2^4(\dfrac{1}{2}t^2-3)\mathrm{d}t$ ------4 分

$=(\dfrac{1}{6}t^3-3t)\Big|_2^4=\dfrac{10}{3}$. ------6 分

六、（本题满分 8 分）

设每月产量为x吨时，总成本函数为

$$C(x)=\frac{1}{4}x^2+8x+4900\text{（元）},$$

求最低平均成本和相应产量的边际成本.

解：平均成本和边际成本分别为

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{4}x+8+\frac{4900}{x} \quad 和 \quad C'(x)=\frac{1}{2}x+8. \text{ ------2 分}$$

令$\overline{C}'(x)=\frac{1}{4}-\frac{4900}{x^2}=0$，解得唯一驻点$x=140$. ------4 分

又$\overline{C}''(140)=\frac{9800}{140^3}>0$，故$x=140$是$\overline{C}(x)$的极小值点，也是最小值点. ---5 分

因此，每月产量为 140 吨时，平均成本最低，其值为 78（元/吨），------6 分

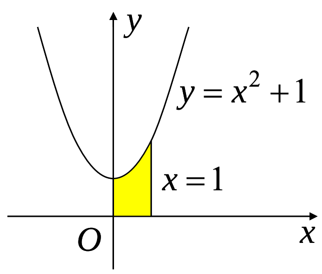
此时，边际成本为$C'(140)=78$（元/吨）. ------8 分

七、（本题满分 10 分）

设平面图形由曲线$y=x^2+1$与直线$y=0,\ x=0,\ x=1$所围成.

（1）求该图形的面积S；

（2）求该图形绕x轴旋转一周所得旋转体的体积V.



解：（1）$S=\int_0^1(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ ------3 分

$$=(\frac{1}{3}x^3+x)\Big|_0^1 \text{ ------4 分}$$

$$=\frac{4}{3}. \text{ ------5 分}$$

（2）$V=\pi\int_0^1(x^2+1)^2\,\mathrm{d}x$ ------7 分

$$=\pi\int_0^1(x^4+2x^2+1)\,\mathrm{d}x \text{ ------8 分}$$

$$=\frac{28}{15}\pi. \text{ -------10 分}$$

八、（本题满分 6 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，在 $(0, 1)$ 内可导，且 $f(0)=0$， $f(1)=1$． 证明：

（1）存在 $x_0 \in (0, 1)$，使得 $f(x_0)=1-x_0$；

（2）存在两个不同的点 x_1，$x_2 \in (0, 1)$，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=1$．

证明：（1）令 $g(x)=f(x)+x-1$，则 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续，

$$g(0)=f(0)+0-1=-1，\ g(1)=f(1)+1-1=1，$$

由零点定理知，存在 $x_0 \in (0, 1)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f(x_0)=1-x_0$．------3 分

（2）由拉格朗日中值定理知，存在 $x_1 \in (0, x_0)$ 和 $x_2 \in (x_0, 1)$，使得

$$f'(x_1)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{1-x_0}{x_0},$$

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{x_0}{1-x_0},$$

于是 $f'(x_1)f'(x_2)=1$．------6 分