院、系领导审批并签名		B 卷

广州大学 2016-2017 学年第二学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ2（32 学时） 考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	18	15	21	21	14	11					100	
得 分												

一、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1．函数 $z=\dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{2x-y^2}}$ 的定义域为 $\underline{D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1,\ y^2<2x\right\}}$.

2．设平面过 z 轴和点 $(-4,1,3)$，则该平面方程为 $\underline{x+4y=0}$.

3．函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 在 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=0.1,\ \Delta y=-0.1$ 时的全增量为 $\underline{-3/11}$；全微分为 $\underline{-0.3}$.

4．改变二次积分的积分次序：

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\underline{\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x}\ .$$

5．微分方程 $y'''+3y''+3y'+6y=e^x$ 的待定特解形式为 $y^*=\underline{ae^x}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．点 $M\left(2,3,4\right)$ 到 x 轴的距离为 (　D　).

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

2．设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处(　B　).

(A) 不连续　　(B) 连续，但偏导数不存在

(C) 可微　　(D) 连续且偏导数存在，但不可微

3．$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$(　D　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) $-\dfrac{1}{4}$

4．判定下列积分值的大小：

$$I_1=\iint\limits_D(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad I_2=\iint\limits_D\ln(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad I_3=\iint\limits_D\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由 $x=0,\ y=0,\ x+y=\dfrac{1}{2},\ x+y=1$ 围成，则(　B　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_2<I_3<I_1$　　(C) $I_3<I_1<I_2$　　(D) $I_3<I_2<I_1$

5．微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解为(　A　).

(A) $y=e^{cx}$　　(B) $y=e^x$　　(C) $y=cxe^x$　　(D) $y=ce^x$

三、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1．设 $z=e^u\sin v$，而 $u=2xy,\ v=x+3y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$ ------3 分

$=e^u\sin v\cdot 2y+e^u\cos v\cdot 1$ ------6 分

$=e^{2xy}[2y\sin(x+3y)+\cos(x+3y)]$.------7 分

2．设 $u=f(x,y,z)=e^{x^2+y^2+z^2}$，$z=x^2\sin y$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

解： $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ------3 分

$=2ye^{x^2+y^2+z^2}+2ze^{x^2+y^2+z^2}\cdot x^2\cos y$ ------6 分

$=2(y+x^4\sin y\cos y)e^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}$.------7 分

3．求由方程 $z^3-3xyz=a^3$（a 是常数)所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：令 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，则

$F_x'=-3yz$，$F_y'=-3xz$，$F_z'=3z^2-3xy$， ------3 分

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{-3yz}{3z^2-3xy}=\dfrac{yz}{z^2-xy}$， ------5 分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y'}{F_z'}=-\dfrac{-3xz}{3z^2-3xy}=\dfrac{xz}{z^2-xy}$.------7 分

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1．计算$\iint\limits_D e^{y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 由 $y=x,\ y=1$ 及 y 轴所围.

解：将 D 表成 $Y-$ 型区域，得 $D: 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y$，------ 2 分

$$\iint\limits_D e^{y^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx \text{ ------4 分}$$

$$=\int_0^1 ye^{y^2}dy \text{ ------5 分}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{y^2}d(y^2)=\frac{1}{2}(e-1)\text{.------7 分}$$

2．计算$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$，其中 D 是由 $x^2+y^2\le 1$ 所确定的圆域.

解：区域 D 在极坐标下可表示为 $0\le r\le 1$，$0\le\theta\le 2\pi$，------ 2 分

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{1+r^2}\text{ ------ 4 分}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\ln(1+r^2)]\Big|_0^1 d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln 2d\theta\text{ ------6 分}$$

$$=\pi\ln 2\text{ ------ 7 分}$$

3．改换二次积分$\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$的积分次序.

解：题设二次积分的积分限：$0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x$，------ 2 分

可改写为：$0\le y\le 1,\ y\le x\le\sqrt{y}$，------ 4 分

所以

$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy=\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx\text{ .------ 7 分}$$

五、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1．求微分方程 $\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = y^2\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ 的通解.

解：先合并 dx 及 dy 的各项，得

$y(x-1)dy = (y^2-1)dx$，------1 分

设 $y^2-1\neq 0,\ x-1\neq 0$，分离变量得

$\frac{y}{y^2-1}dy = \frac{1}{x-1}dx$，------ 3 分

两端积分，得

$\frac{1}{2}\ln|y^2-1| = \ln|x-1| + C_1 \quad \Rightarrow \quad y^2-1 = \pm e^{2C_1}(x-1)^2$，------6 分

记 $C=\pm e^{2C_1}$，则得到题设方程的通解为

$y^2-1 = C(x-1)^2$. -------7 分

2．求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{y}{x+1} = \sqrt{x+1}$ 的通解.

解：先求对应齐次方程的通解：

$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln y = \ln(x+1) + \ln C \Rightarrow y = C(x+1)$.------3 分

再用常数变易法求原方程的解. 令 $y = u(x+1)$，则有

$\frac{dy}{dx} = u'(x+1) + u$，------5 分

代入原方程，得 $u' = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$，积分得 $u = 2\sqrt{x+1} + C$，

所以原方程的通解为 $y = (x+1)\left(2\sqrt{x+1} + C\right)$.------8 分

六、（本题满分 11 分）

求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解：解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases},$$

得驻点为 $(1,0)$，$(1,2)$，$(-3,0)$，$(-3,2)$.-------4 分

$A=f_{xx}(x,y)=6x+6$，$B=f_{xy}(x,y)=0$，$C=f_{yy}(x,y)=-6y+6$，------ 5 分

在点 $(1,0)$ 处，$AC-B^2=12\cdot 6>0$，又 $A>0$，

故函数在该点处有极小值 $f(1,0)=-5$；------7 分

在点 $(1,2)$ 和 $(-3,0)$ 处，$AC-B^2=-12\cdot 6<0$，

故函数在这两点处没有极值；------ 9 分

在点 $(-3,2)$ 处，$AC-B^2=-12\cdot(-6)>0$，又 $A<0$，

故函数在该点处有极大值 $f(-3,2)=31$.------11 分