院、系领导 审批并签名		A 卷

广州大学 2016-2017 学年第二学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ2（32 学时）　　　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	18	15	21	21	14	11					100	
得 分												

一、填空题（每空 3 分，共 18 分）

1．函数 $z=\dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{\sqrt{4x-y^2}}$ 的定义域为 $\underline{\quad D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1,\,y^2<4x\right\}\quad}$.

2．设平面过 z 轴和点 $(-3,\ 1,\ -2)$，则该平面方程为 $\underline{\quad x+3y=0\quad}$.

3．函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 在 $x=2,\ y=1,\ \Delta x=0.1,\ \Delta y=-0.2$ 时的全增量为 $\underline{\quad -5/42\quad}$；

全微分为 $\underline{\quad -0.125\quad}$.

4．改换二次积分的积分次序：

$$\int_0^1 \mathrm{d}\,y\int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}\,x=\underline{\quad\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_x^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\,y\quad}.$$

5．微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的待定特解形式为 $y^*=\underline{\quad x(ax+b)e^{2x}\quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1．点 $M_1\left(2,3,1\right)$ 到点 $M_2\left(2,7,4\right)$ 的距离 $\left|M_1M_2\right|=$(　C　).

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

2．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处(　D　).

(A) 不连续　　(B) 偏导数不存在

(C) 可微　　(D) 连续且偏导数存在，但不可微

3．$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$(　D　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) $\dfrac{1}{2}$　　(D) 0

4．判定下列积分值的大小：

$$I_1=\iint\limits_D \ln^3(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad I_2=\iint\limits_D (x+y)^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad I_3=\iint\limits_D \sin^3(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由 $x=0,\ y=0,\ x+y=\dfrac{1}{2},\ x+y=1$ 围成，则(　C　).

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_3<I_2<I_1$　　(C) $I_1<I_3<I_2$　　(D) $I_3<I_1<I_2$

5．微分方程 $xy'-y\ln y=0$ 的通解为(　D　).

(A) $y=ce^x$　　(B) $y=e^x$　　(C) $y=cxe^x$　　(D) $y=e^{cx}$

三、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1．设 $z=e^u\sin v$，而 $u=xy,\ v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$------3 分

$=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1$------6 分

$=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]$. ------7 分

2．求 $z=(3x^2+y^2)^{4x+2y}$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解：设 $u=3x^2+y^2$，$v=4x+2y$，则 $z=u^v$.

$\dfrac{\partial z}{\partial u}=v\cdot u^{v-1}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}=u^v\cdot\ln u$，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=6x$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=4$，------3 分

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=v\cdot u^{v-1}\cdot 6x+u^v\cdot\ln u\cdot 4$------6 分

$=6x(4x+2y)(3x^2+y^2)^{4x+2y-1}+4(3x^2+y^2)^{4x+2y}\ln(3x^2+y^2)$.------7 分

3．求由方程 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $F(x,y,z)=\dfrac{x}{z}-\ln\dfrac{z}{y}$，则 $F(x,y,z)=0$，

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{z},\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}\left(-\dfrac{z}{y^2}\right)=\dfrac{1}{y},\quad \dfrac{\partial F}{\partial z}=-\dfrac{x}{z^2}-\dfrac{y}{z}\cdot\dfrac{1}{y}=-\dfrac{x+z}{z^2}$，------4 分

利用隐函数求导公式，得

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{z}{x+z},\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=\dfrac{z^2}{y(x+z)}$.------7 分

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1．计算$\iint\limits_{D} xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由直线$y=1,\ x=2$及$y=x$所围成的闭区域.

解：$\iint\limits_{D} xyd\sigma=\int_1^2\left[\int_1^x xydy\right]dx$------3 分

$$=\int_1^2\left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_1^x dx=\int_1^2\left[\frac{x^3}{2}-\frac{x}{2}\right]dx \text{------5 分}$$

$$=\left[\frac{x^4}{8}-\frac{x^2}{4}\right]_1^2=1\frac{1}{8}.\text{------7 分}$$

2．计算$\iint\limits_{D}\frac{y^2}{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由曲线$x^2+y^2=2x$所围成的闭区域.

解：区域D的积分限为$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$，$0\le r\le 2\cos\theta$，------2 分

$$\iint\limits_{D}\frac{y^2}{x^2}dxdy=\iint\limits_{D}\frac{r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta}rdrd\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}rdr \text{------4 分}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta d\theta \text{------5 分}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\pi.\text{------7 分}$$

3．改换二次积分$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$的积分次序.

解：题设二次积分的积分限：$\begin{cases}0\le x\le 1, & 0\le y\le\sqrt{2x-x^2}\\ 1\le x\le 2, & 0\le y\le 2-x\end{cases}$------2 分

可改写为$0\le y\le 1,\ 1-\sqrt{1-y^2}\le x\le 2-y$，------5 分

所以

$$\text{原式}=\int_0^1dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)dx.\text{------7 分}$$

五、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1．求微分方程 $y^2+x^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的通解.

解：原方程变形为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}，\text{------1 分}$$

令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $y=ux$， $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，故原方程变为

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1}，\text{即 } x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1}.\text{------3 分}$$

分离变量得 $\left(1-\dfrac{1}{u}\right)du=\dfrac{dx}{x}$，两边积分得

$$u-\ln|u|+C=\ln|x|，\text{即 }\ln|xu|=u+C，\text{------6 分}$$

回代 $u=\dfrac{y}{x}$ 便得所给方程的通解为 $\ln|y|=\dfrac{y}{x}+C$.------8 分

2．求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{5/2}$ 的通解.

解：先求对应齐次方程的通解：

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}\Rightarrow\ln y=2\ln(x+1)+\ln C\Rightarrow y=C(x+1)^2.\text{------3 分}$$

再用常数变易法求原方程的解. 令 $y=u(x+1)^2$，则有

$$\frac{dy}{dx}=u'(x+1)^2+2u(x+1)，\text{------5 分}$$

代入原方程，得 $u'=(x+1)^{1/2}$，积分得 $u=\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C$，

所以原方程的通解为 $y=(x+1)^2\left[\dfrac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right]$.------8 分

六、（本题满分 11 分）

设q_1为商品A的需求量，q_2为商品B的需求量，其需求函数分别为

$$q_1 = 16 - 2p_1 + 4p_2，\quad q_2 = 20 + 4p_1 - 10p_2，$$

总成本函数为

$$C = 3q_1 + 2q_2，$$

其中p_1，p_2为商品A和B的价格，试问价格p_1，p_2取何值时可使利润最大？

解：按题意，总收益函数为

$R = p_1q_1 + p_2q_2$，------2 分

于是总利润函数为

$$L = R - C = q_1(p_1 - 3) + q_2(p_2 - 2)$$

$= (p_1 - 3)(16 - 2p_1 + 4p_2) + (p_2 - 2)(20 + 4p_1 - 10p_2)$------5 分

求一阶偏导数，并令其为零：

$\dfrac{\partial L}{\partial p_1} = 14 - 4p_1 + 8p_2 = 0$，------7 分

$\dfrac{\partial L}{\partial p_2} = 28 + 8p_1 - 20p_2 = 0$，------9 分

由此解得$p_1 = 63/2$，$p_2 = 14$（唯一驻点）．故取价格$p_1 = 63/2$，$p_2 = 14$时利润可达最大，而此时得产量为$q_1 = 9,\ q_2 = 6$. ------11 分

【注】在唯一驻点处取极值，不一定是最值. 此题解法是不完整的.