院、系领导审批并签名		B 卷

广州大学 2016-2017 学年第一学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ1（64 学时）　　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题次	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	评卷人
分数	20	15	21	14	6	24				
评分										

一、填空题（每空 2 分，本大题满分 20 分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=$ $\underline{\quad x \quad}$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n}=$ $\underline{\quad 5 \quad}$.

2．若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，则$a=$ $\underline{\quad 1 \quad}$，$b=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

3．设函数$f(x)=\ln(1+x)$，则$f'(x)=$ $\underline{\quad \dfrac{1}{1+x} \quad}$，　$f''(0)=$ $\underline{\quad -1 \quad}$.

4．由方程$\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$表示的函数$y=y(x)$的一阶导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ $\underline{\quad 2t \quad}$，二阶导数$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ $\underline{\quad 2(1+t^2) \quad}$.

5．设$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=(x-1)^7+C$，则常数$C=$ $\underline{\quad 1 \quad}$，$f(x)=$ $\underline{\quad 7(x-1)^6 \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，本大题满分 15 分）

1．设$f'(x_0)$存在，则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$（　B　）.

(A) $f'(x_0)$；　(B) $2f'(x_0)$；　(C) $f'(x_0-h)$；　(D) $f'(x_0+h)$.

2．函数$f(x)=x|x|$在$x=0$处（　A　）.

(A) 连续，可导;　　(B) 连续，不可导;

(C) 不连续，可导;　　(D) 不连续，不可导.

3．当$x\to 0$时，与$1-\cos x^2$等价的无穷小是（　C　）.

(A) $\dfrac{1}{2}x^2$；　(B) x^2；　(C) $\dfrac{1}{2}x^4$；　(D) x^4.

4．设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos x$，则 $f'(x)=$（ D ）.

(A) $\sin x$;　　(B) $-\sin x$;　　(C) $\cos x$;　　(D) $-\cos x$.

5．$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,\mathrm{d}x=$（ D ）.

(A) 1;　　(B) 2;　　(C) -2;　　(D) 1/2.

三、解答下列各题（每小题 7 分，本大题满分 21 分）

1．求由方程 $\sin(x-y)-y\sin x=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：方程两边同时对自变量 x 求导，得

$$\cos(x-y)(1-y')-(y'\sin x+y\cos x)=0，\text{------5 分}$$

解得

$$y'=\frac{\cos(x-y)-y\cos x}{\cos(x-y)+\sin x}.\text{------7 分}$$

2．设 $y=2\arctan x-\frac{\ln(x^2+1)}{x}$，求 $\mathrm{d}y$.

解：$y'=\frac{2}{1+x^2}-\frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot x-\ln(x^2+1)}{x^2}$------4 分

$=\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$，------5 分

$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}\mathrm{d}x$. ------7 分

3．求函数 $f(x)=x^3-9x^2+15x-3$ 的单调区间和极值.

解：$f'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$，

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x=1$ 和 $x=5$，------2 分

当 $x\in(-\infty,\ 1)$ 或 $x\in(5,\ +\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以单调递增区间为 $(-\infty,1]$ 和 $[5,+\infty)$；------4 分

当 $x\in(1,\ 5)$ 时，$f'(x)<0$，所以单调递减区间为 $[1,\ 5]$；------5 分

由单调区间可知，$f(1)=4$ 为极大值；$f(5)=-28$ 为极小值. ------7 分

四、计算下列极限（每小题 7 分，本大题满分 14 分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x\cdot(-1)}}$------4 分

$=\dfrac{e}{e^{-1}}=e^2$. ------7 分

2．$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\cos(x-1)}{x^3-x^2-x+1}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{3x^2-2x-1}$------3 分

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos(x-1)}{6x-2}$------6 分

$=\dfrac{1}{4}$. ------7 分

五、（本题满分 6 分）

证明：方程$x^5+2x-4=0$只有一个正根.

证明：(1) 存在性：

令 $f(x)=x^5+2x-4$，则 $f(x)$ 在$[0,\ +\infty)$上连续，

$f(0)=-4<0$， $f(2)=32>0$，

由零点定理知在$(0,\ 2)$内至少存在一点ξ，使 $f(\xi)=0$，即方程$x^5+2x-4=0$至少有一个正根ξ. ------3 分

(2) 唯一性：

$f'(x)=5x^4+2>0$在$(0,\ +\infty)$上恒成立，所以 $f(x)$ 在$(0,\ +\infty)$内严格单调递增，因此方程$x^5+2x-4=0$在$(0,\ +\infty)$内只能有一个根. ------6 分

六、解答下列各题（每小题 8 分，本大题满分 24 分）

1．求不定积分 $\int \ln(x^2+1)\,\mathrm{d}\,x$.

解：原式 $=x\ln(x^2+1)-\int x\,\mathrm{d}\ln(x^2+1)$------2 分

$=x\ln(x^2+1)-\int \dfrac{2x^2}{1+x^2}\mathrm{d}\,x$------4 分

$=x\ln(x^2+1)-2\int(1-\dfrac{1}{1+x^2})\,\mathrm{d}\,x$------6 分

$=x\ln(x^2+1)-2(x-\arctan x)+C$.------8 分

2．计算定积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x-\sin^5 x}\,\mathrm{d}\,x$.

解：原式 $=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^3 x}\,|\cos x|\,\mathrm{d}\,x$------2 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^3 x}\cos x\,\mathrm{d}\,x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin^3 x}\cos x\,\mathrm{d}\,x$------3 分

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^3 x}\,\mathrm{d}\sin x-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{\sin^3 x}\,\mathrm{d}\sin x$------5 分

$=\dfrac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x\,\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\dfrac{4}{5}$.------8 分

3．求由曲线 $y=e^x$ 与该曲线在 $x=1$ 处的切线以及 y 轴所围成的图形的面积.

解： $y'=e^x$，得 $x=1$ 处的切线斜率 $k=e$，切线方程为

$y-e=e(x-1)$，即 $y=ex$，------3 分

所求面积为

$A=\int_0^1(e^x-ex)\,\mathrm{d}\,x$------6 分

$=(e^x-\dfrac{ex^2}{2})\Big|_0^1=\dfrac{e}{2}-1$.------8 分