院、系领导审批并签名		A 卷

广州大学 2016-2017 学年第一学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ1（64 学时） 考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题次	一	二	三	四	五	六	七	八	总分	评卷人
分数	20	15	21	14	6	24				
评分										

一、填空题（每空 2 分，本大题满分 20 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=$ __2__；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=$ __0__.

2．若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=-1$，则 $a=$ __-3__，$b=$ __2__.

3．已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，则 $f(0)=$ __0__，此函数的图形在横坐标 $x=0$ 的点处的切线方程为 __$y=2x$__.

4．设 $f(x)=x^3-9x^2+15x-3$，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 __$[1,\ 5]$__，曲线 $y=f(x)$ 的拐点坐标是 __$(3,\ -12)$__.

5．$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=$ __$\dfrac{\pi}{2}$__；$\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^2})^2\,\mathrm{d}x=$ __2__.

二、选择题（每小题 3 分，本大题满分 15 分）

1．当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 与 x^{α} 是同阶无穷小，则 $\alpha=$(　C　).

(A) 1;　(B) 2;　(C) 3;　(D) 4.

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+e^x}{1+e^{2x}}=$(　D　).

(A) 0;　(B) 1;　(C) 2;　(D) 不存在.

3．$x=0$ 是函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 的(　C　).

(A) 连续点;　(B) 可去间断点;　(C) 跳跃间断点;　(D) 无穷间断点.

4．设 $f(x)$ 的一个原函数为 $\sin x$，则 $f'(x)=$（ B ）．

(A) $\sin x$； (B) $-\sin x$； (C) $\cos x$； (D) $-\cos x$．

5．若 $f(x)$ 满足 $\int_0^x [2f(t)+1]\mathrm{d}t = f(x)-1$，则 $f'(0)=$（ D ）．

(A) $2e-1$； (B) 1； (C) 2； (D) 3．

三、解答下列各题（每小题 7 分，本大题满分 21 分）

1．求由方程 $\sin(xy)+y^3-2x=0$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

解：方程两边同时对自变量 x 求导，得

$$\cos(xy)(y+xy')+3y^2y'-2=0，$$ ------5 分

解得

$$y'=\frac{2-y\cos(xy)}{x\cos(xy)+3y^2}.$$ ------7 分

2．设 $y=x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$，求 $\mathrm{d}y$．

解：$y'=\arcsin\frac{x}{2}+x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}\cdot(-2x)$ ------4 分

$=\arcsin\frac{x}{2}$，------5 分

$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$．------7 分

3．设 $y=\sin^2 x$，求 $y^{(2017)}$．

解：$y'=2\sin x\cos x=\sin 2x$，------2 分

$y''=2\cos 2x$，------3 分

$y'''=-4\sin 2x$，$y^{(4)}=-8\cos 2x$，$y^{(5)}=16\sin 2x$，------5 分

观察归纳得

$y^{(2017)}=2^{2016}\sin 2x$．------7 分

四、计算下列极限（每小题 7 分，本大题满分 14 分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^x$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}}$------4 分

$=\dfrac{e^2}{e^{-2}}=e^4$. ------7 分

2．$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1})$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$------1 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}$------4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}$------6 分

$=\dfrac{1}{2}$. ------7 分

五、（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：在 $[a,\ \dfrac{a+b}{2}]$ 上存在一点 ξ，使 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{b-a}{2})$.

证明：令 $F(x)=f(x)-f(x+\dfrac{b-a}{2})$，则 $F(x)$ 在 $[a,\ \dfrac{a+b}{2}]$ 上连续，

$F(a)=f(a)-f(\dfrac{a+b}{2})$，$F(\dfrac{a+b}{2})=f(\dfrac{a+b}{2})-f(b)=-F(a)$. ------3 分

若 $F(a)=0$，则 $\xi=a$ 即为所求；

若 $F(a)\neq 0$，则 $F(\dfrac{a+b}{2})F(a)<0$，由零点定理知在 $(a,\ \dfrac{a+b}{2})$ 内至少存在一点 ξ，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{b-a}{2})$. ------6 分

六、解答下列各题（每小题 8 分，本大题满分 24 分）

1．求不定积分$\int \arccos x \,\mathrm{d}x$.

解：原式$= x\arccos x - \int x\,\mathrm{d}\arccos x$------2 分

$= x\arccos x + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$------3 分

$= x\arccos x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}(1-x^2)$------6 分

$= x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.--------8 分

2．计算定积分$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解：令$\sqrt{x}=t$，则$x=t^2$，$\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$，------2 分

当$x=0$时，$t=0$；当$x=4$时，$t=2$，------3 分

原式$=\int_0^2 \frac{t}{1+t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$-------4 分

$=2\int_0^2 (t-1+\frac{1}{1+t})\,\mathrm{d}t$------6 分

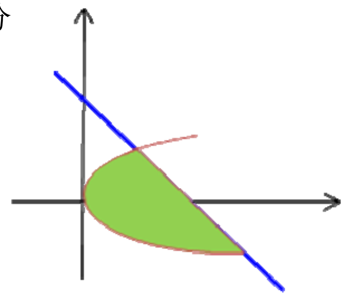
$=(t^2-2t+2\ln|1+t|)\Big|_0^2 = 2\ln 3$.------8 分

3．求抛物线$y^2=2x$与直线$y=-x+4$所围成的图形的面积.

解：所围区域如图所示.-------1 分

抛物线与直线的交点为$(2,\ 2)$和$(8,\ -4)$，------2 分

所求面积为



$A=\int_{-4}^2 (4-y-\frac{y^2}{2})\,\mathrm{d}y$------5 分

$=(4y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6})\Big|_{-4}^2 = 18$.------8 分