院、系领导审批并签名		A 卷

广州大学 2015-2016 学年第二学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ2（32 学时）　　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	总 分	评卷人
分 数	18	18	21	21	14	8	100	
得 分								

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1．函数 $z=\dfrac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{y}}$ 的定义域为 $\underline{D=\{(x,y)\mid y>0,\ |x|<1\}}$

2．设平面过 x 轴和点 $(4,-3,1)$，则该平面方程为 $\underline{y-3z=0}$

3．函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 在 $x=2,\ y=1,\ \Delta x=0.1,\ \Delta y=-0.1$ 时的全增量为 $\underline{-\dfrac{1}{14}}$

4．二重积分 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的符号为＿负＿

5．设积分区域 D 由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成，则二重积分

$$\iint\limits_D xyf(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\underline{\quad 0\quad}$$

6．微分方程 $y''-5y'+6y=xe^{2x}$ 的待定特解形式为 $y^*=\underline{x(ax+b)e^{2x}}$

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1．函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续是偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 存在的（ D ）.

(A) 充分条件；　(B) 必要条件；　(C) 充要条件；　(D) 无关条件.

2．二元函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}=$（　B　）.

(A) 1；　(B) 2；　(C) $\dfrac{1}{2}$；　(D) ∞.

3．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则函数 $f(x,y)$ 在(0, 0)处（　D　）.

(A) 不连续；　(B) 连续，但偏导数不存在；

(C) 可微；　(D) 连续且偏导数存在，但不可微.

4．设区域 D 是三角形闭区域，三顶点各为(1,0)，(1,1)，(2,0)，若

$I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D \ln^2(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，则有（　C　）.

(A) $I_1<I_2$；　(B) $I_1=I_2$；　(C) $I_1>I_2$；　(D) 不能比较.

5．设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于（　A　）.

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$；　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$；

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$；　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x$.

6．设微分方程 $y''+2y'+y=0$，则 $y=Cxe^{-x}$（其中 C 为任意常数）是（　D　）.

(A) 方程的通解；　(B) 方程的特解；

(C) 不是方程的解；　(D) 方程的解，但既非通解也非特解.

三、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1．设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，试求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$ 及 $f_{yz}(0,-1,0)$．

解：$f_x=y^2+2zx$ ------2 分

$f_y=z^2+2xy$ ------4 分

$f_{xx}(0,0,1)=2z|_{(0,0,1)}=2$ ------5 分

$f_{xz}(1,0,2)=2x|_{(1,0,2)}=2$ ------6 分

$f_{yz}(0,-1,0)=2z|_{(0,-1,0)}=0$ ------7 分

2．求 $z=f(xy,2x+y^2)$ 的偏导数和全微分(其中 $f(u,v)$ 具有连续偏导数)．

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=yf_1'+2f_2'$ ------3 分

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=xf_1'+2yf_2'$ ------5 分

$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=(yf_1'+2f_2')dx+(xf_1'+2yf_2')dy$ ------7 分

3．已知 $z=f(x,y)$ 是由方程 $e^z+\sin z=x^2y$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$．

解：记 $F=e^z+\sin z-x^2y$，则 $F_x=-2xy$，$F_z=e^z+\cos z$ ------2 分

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{2xy}{e^z+\cos z}$ ------4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2y(e^z+\cos z)-2xy(e^z-\sin z)z_x}{(e^z+\cos z)^2}$ ------6 分

$=\dfrac{2y(e^z+\cos z)^2-4x^2y^2(e^z-\sin z)}{(e^z+\cos z)^3}$ ------7 分

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 21 分）

1．计算$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中积分区域$D$由$y=x$，$y=\frac{1}{x}$，$x=2$围成.

解：积分区域为X型，D: $\frac{1}{x}\le y\le x, 1\le x\le 2$ ------2 分

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx \quad \text{------5 分}$$

$$=\int_1^2(x^3-x)dx=\frac{9}{4}. \quad \text{------7 分}$$

2．计算二重积分$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,y)|\,x^2+y^2\le 1\}$.

解：$0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$ ------2 分

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{rdr}{1+r^2} \quad \text{------3 分}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[\ln(1+r^2)]\Big|_0^1 d\theta \quad \text{------5 分}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\ln 2d\theta=\pi\ln 2 \quad \text{-------7 分}$$

3. 证明$\int_0^a \mathrm{d}y\int_0^y f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a(a-x)f(x)\mathrm{d}x$，其中$a$为常数，且$a>0$.

证：等式左端二次积分的积分限: $0\le y\le a, 0\le x\le y$

可改写为$0\le x\le a, x\le y\le a$ ------2 分

于是 $$\int_0^a dy\int_0^y f(x)dx=\int_0^a dx\int_x^a f(x)dy \quad \text{------4 分}$$

$$=\int_0^a\left[f(x)\int_x^a dy\right]dx \quad \text{------6 分}$$

$$=\int_0^a(a-x)f(x)dx \quad \text{------7 分}$$

五、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1．求微分方程 $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解：由通解公式得

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right) \text{ ------3 分}$$

$$=e^{-\ln x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot e^{\ln x}dx+C\right) \text{ ------5 分}$$

$$=\frac{1}{x}(-\cos x+C) \text{ ------7 分}$$

2．求微分方程 $4y''+4y'+y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$， $y'|_{x=0}=0$ 的特解.

解：特征方程为 $4r^2+4r+1=0$，

特征根为 $r_1=r_2=-\frac{1}{2}$ ------2 分

通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{2}}$ ------4 分

$$y'=(-\frac{1}{2}C_1+C_2-\frac{1}{2}C_2x)e^{-\frac{x}{2}}$$

由初始条件 $y|_{x=0}=2$， $y'|_{x=0}=0$，得 $C_1=2$， $C_2=1$． ------6 分

所求特解为 $y=(2+x)e^{-\frac{x}{2}}$ ------7 分

六、（本题满分 8 分）

设销售收入 R(单位:万元)与花费在两种广告宣传的费用 x, y(单位:万元)之间的关系为

$$R=\frac{200x}{x+5}+\frac{100y}{10+y}$$

利润额相当五分之一的销售收入，并要扣除广告费用. 已知广告费用总预算金是 25 万元，试问如何分配两种广告费用使利润最大?

解:　设利润为 z,有

$$z=\frac{1}{5}R-x-y=\frac{40x}{x+5}+\frac{20y}{10+y}-x-y$$ ------2 分

限制条件为 $x+y=25$ 这是条件极值问题.

令 $$L(x,y,\lambda)=\frac{40x}{x+5}+\frac{20y}{10+y}-x-y+\lambda(x+y-25)$$ -----4 分

从 $$L_x=\frac{200}{(5+x)^2}-1+\lambda=0,\quad L_y=\frac{200}{(10+y)^2}-1+\lambda=0$$ ------6 分

得 $$(5+x)^2=(10+y)^2$$

又 $y=25-x$, 解得 $x=15$, $y=10$.

根据问题本身的意义及驻点的唯一性即知,当投入两种广告的费用分别为 15 万元和 10 万元时,可使利润最大。------8 分