院、系领导审批并签名		B 卷

广州大学 2015-2016 学年第一学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ1（64 学时） 考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	15	15	14	12	18	10	10	6			100	
得 分												

一、填空题（每空 3 分，本大题满分 15 分）

1．$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n^2}\sin n=$ __0__.

2．曲线 $y=2x^3+1$ 在点 $(1,\ 3)$ 处的切线与 y 轴的夹角为 α 且 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，则

$\tan\alpha=$ __$\dfrac{1}{6}$__

3．设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=$ __$2f'(x_0)$__.

4．曲线 $y=x^5$ 的拐点坐标为 __$(0,\ 0)$__.

5．当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 $\dfrac{1}{2}x^a$ 为等价无穷小，则 $a=$ __2__.

二、选择题（每小题 3 分，本大题满分 15 分）

1．函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}]$ 上满足罗尔定理的 ξ 有（ B ）个.

（A）0； （B）1； （C）2； （D）3.

2．函数 $f(x)$ 在某点左、右导数存在是函数在该点连续的（ A ）.

（A）充分条件； （B）必要条件； （C）充要条件； （D）无关条件.

3．下列说法正确的是（　C　）．

（A）两个无穷大的商是无穷大；　　　　　（B）零不是无穷小；

（C）无穷小与无穷小的乘积是无穷小；　　（D）无穷小与无穷小的商是无穷小.

4．$\dfrac{d(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t)}{dx}$ =（　B　）．

（A）0；　（B）e^{x^2}；　（C）e^{t^2}；　（D）$e^{x^2}+c$（c为任意常数).

5．设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数，若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有(　D　)个零点.

（A）1；　（B）2；　（C）3；　（D）以上都有可能.

三、解答下列各题（每小题 7 分，本大题满分 14 分）

1． $y=x^a(a\in R)$，求 $y^{(n)}$.

解　$y'=ax^{a-1}$，------2 分

$y''=(ax^{a-1})'=a(a-1)x^{a-2}$，------4 分

$y'''=(a(a-1)x^{a-2})'=a(a-1)(a-2)x^{a-3}$，

……

$y^{(n)}=a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n}(n\geq 1)$. -------7 分

2．求由方程$xy-e^x+e^y=0$所确定的隐函数y的导数 $\dfrac{dy}{dx}, \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解　方程两边对x求导,

$$y+x\frac{dy}{dx}-e^x+e^y\frac{dy}{dx}=0,$$

解得$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x-y}{x+e^y}$. ------5 分

由原方程知$x=0, y=0$，所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{e^x-y}{x+e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=1. \text{------7 分}$$

四、计算下列极限（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1． $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{1/n}$.

解　易见对任意自然数n，有

$$3^n<1+2^n+3^n<3\cdot 3^n,$$

故

$$3<\left[1+2^n+3^n\right]^{\frac{1}{n}}<3\cdot 3^{\frac{1}{n}},\text{------3 分}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}3=3$，$\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3$，所以由夹逼法得

$$\lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3.\text{------6 分}$$

2． $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x})=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$------2 分

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}\text{------5 分}$$

$$=\frac{0}{1}=0.\text{------6 分}$$

五、计算下列积分（每小题 6 分，本大题满分 18 分）

1． $\displaystyle\int\frac{1}{x(1+2\ln x)}dx$.

解　原积分$=\displaystyle\int\frac{1}{1+2\ln x}d(\ln x)$------2 分

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+2\ln x}d(1+2\ln x)\text{------3 分}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|1+2\ln x\right|+C.\text{------6 分}$$

2．$\int x^3 \ln x dx$.

解　原积分$=\int \ln x d\left(\frac{x^4}{4}\right)$------2 分

$$=\frac{1}{4}x^4 \ln x-\frac{1}{4}\int x^3 dx \text{------4 分}$$

$$=\frac{1}{4}x^4 \ln x-\frac{1}{16}x^4+C. \text{------6 分}$$

3．$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解　$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}\text{------2 分}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}[\arctan x]\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}[\arctan x]\Big|_0^b\text{------4 分}$$

$$=-\lim_{a\to-\infty}\arctan a+\lim_{b\to+\infty}\arctan b$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi. \text{------6 分}$$

六、（本题满分 10 分）

求由抛物线 $y+1=x^2$ 与直线 $y=1+x$ 所围成的面积.

解　由方程组$\begin{cases} y=1+x \\ y=x^2-1 \end{cases}$,

解得抛物线 $y+1=x^2$ 与直线的交点为$(-1,0)$和$(2,3)$. ------3 分

所求面积

$$A=\int_{-1}^{2}[(1+x)-(x^2-1)]dx\text{------6 分}$$

$$=\frac{9}{2}. \text{------10 分}$$

七、（本题满分 10 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+3)}, & x\neq 1,\quad x\neq -3,\\ 2, & x=1,\end{cases}$ 为使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，常数 a 与 b 应如何取值？

解　因为 $f(1)=2$，为使 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，只要

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+3)}=2.\qquad (*)\ \text{------2 分}$$

而要使 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+3)}$ 存在，须 $\lim_{x\to 1}(x^4+ax+b)=0$，即 $1+a+b=0$，

得 $a=-(b+1)$，------4 分

于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x)&=\lim_{x\to 1}\frac{x^4-(b+1)x+b}{(x-1)(x+3)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x-b)}{(x-1)(x+3)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x-b}{x+3}=\frac{3-b}{4}.\ \text{------8 分}\end{aligned}$$

由（*），得 $b=-5\Rightarrow a=-(-5+1)=4$.

所以当 $a=4$，$b=-5$ 时，$f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. ------10 分

八、（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且

$$f(a)<a,\ f(b)>b.$$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证　令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, ------2 分

而

$$F(a)=f(a)-a<0,\ F(b)=f(b)-b>0,\ \text{------4 分}$$

由零点定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$. ------6 分