院、系领导 审批并签名		A 卷

广州大学 2014-2015 学年第二学期考试卷

课 程：线性代数 I 、II **考 试 形 式：闭卷、考试**

学院：__________ 专业班级：__________ 学号：____________ 姓名：__________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总 分	评卷人
分 数	15	15	8	8	10	12	12	12	8	100	
得 分											

一．填空题（每空 3 分，共 15 分）

1. 行列式$\begin{vmatrix} 121 & 133 & -985 \\ 0 & 122 & 1 \\ -155 & 199 & 666 \end{vmatrix}$中第 3 行第 2 列元的代数余子式的值为<u> -121 </u>。

2．若 3 阶方阵A的秩是 3，$R(B)=1$，则$R(AB)=$<u> 1 </u>。

3．设$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，矩阵$B$是$A$的等价标准型，则$|2B^{-1}-5B^*|=$<u> -27 </u>。

4．设$\alpha_1=\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$，则齐次线性方程$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=0$的解空间的维数=<u> 1 </u>。

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha},\beta$ 线性无关， 则α,β,γ线性相关是γ 能被α,β线性表示的<u> 充要</u>条件。

二．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1 关于等式$AC=BC$，若A,B,C是方阵且$C\neq O$，则必有【 D 】。

（A） $A=O$或$B=O$； （B） $A\neq B$；

（C）$|A-B|=0$且$|C|=0$； （D）当$|C|\neq 0$时，$A=B$.

2．若A为 3 阶可逆矩阵，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}A$，则【 A 】。

（A）交换A^{-1}的第 2，3 列得到B^{-1}；

（B）交换 A^{-1} 的第 2，3 行得到 B^{-1}；
（C）交换 A^{-1} 的第 1，2 列得到 B^{-1}；
（D）交换 A^{-1} 的第 1，3 行得到 B^{-1}.

3．设矩阵 A,B,P,Q 满足 $B=PAQ$，下列说法正确的是【　B　】。
（A）若 B 为单位矩阵，则 P,A,Q 可逆；
（B）若 P,Q 可逆，则 A 可经过有限次初等变换化为 B；
（C）若 B 为单位矩阵 E， P,A,Q 皆为方阵，则必有 $QAP=E$；
（D）无论 P,Q 是否可逆，都有 $R(A)=R(B)$.
4．如果线性方程组 $AX=O$ 只有零解， A 是 m 行 n 列的矩阵，那么以下判断错误的是【 A 】。
（A） A 的列向量组线性相关， m 比 n 小；
（B） $AX=B$ 可能无解；
（C） $AX=B$（ $B\neq O$ ）不可能有无穷多解；
（D） $AX=B$ 可能有唯一解.
5．已知方阵 $\begin{pmatrix}3 & 1\\ a & -1\end{pmatrix}$ 的特征值 λ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\ -5\end{pmatrix}$，则 a,λ 的值分别是【 C 】。
(A)5，2；　　(B) -5,2；　(C)5,-2；　　(D)-5，-2.

三、（8 分）

设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 1\end{pmatrix}$，求 A^8.

解　　令 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^8=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^8 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^8\end{pmatrix}$。……………2 分

因为： $\boldsymbol{A}_1^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$,所以： $\boldsymbol{A}_1^8=(\boldsymbol{A}_1^2)^4=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}^4=\begin{pmatrix}5^4 & 0\\ 0 & 5^4\end{pmatrix}$。 ……4 分

又因： $\boldsymbol{A}_2^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -10 & 1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}_2^3=\boldsymbol{A}_2^2.\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -10 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -15 & 1\end{pmatrix}$,类推： $\boldsymbol{A}_2^8=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -40 & 1\end{pmatrix}$, 　　……7 分

综上： $\boldsymbol{A}^8=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^8 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5^4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5^4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -40 & 1\end{pmatrix}$。 ……………8 分

四．（8 分）

计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$。

解：$D=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$ ……………………………………………2 分

$=10\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&-1\\0&1&-2&-1\\0&-3&-2&-1\end{vmatrix}$ ……………………………………………4 分

$=10\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&-2&-1\\-3&-2&-1\end{vmatrix}$ ……………………………………6 分

$=10\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&-4&0\\0&4&-4\end{vmatrix}=160$。 ……………………………………………8 分

五．解矩阵方程（本题满分 10 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}$，且 $AB=A+2B$，求 B。

解：由 $AB=A+2B$，得 $(A-2I)B=A$ ………………………………2 分

因为：$\left|A-2I\right|=1$，所以：$A-2I$ 可逆，故 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{A},$ ………4 分

构造：$(A-2I \vdots A)=\begin{pmatrix}-1&1&0&\vdots&1&1&0\\1&-2&-1&\vdots&1&0&-1\\-2&-2&-3&\vdots&-2&-2&-1\end{pmatrix}$

对该矩阵实施行初等变换：

$$\xrightarrow[r_3-2r_2]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}-1&1&0&\vdots&1&1&0\\0&-1&-1&\vdots&2&1&-1\\0&-4&-3&\vdots&-4&-4&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-4r_2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+r_3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -10 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$ ………………………8 分

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \vdots & -9 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & -10 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

由此得 $B=\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ 10 & 7 & -2 \\ -12 & -8 & 3 \end{pmatrix}$ ………………………………10 分

（此计算过程部分省略不扣分）

六.（12 分）

求方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-2x_3+x_4=-11 \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=1 \end{cases}$ 的通解并说明其结构。

解：对增广矩阵实施行初等变换化为

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & -11 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & 5 & -15 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$ **……………3分**

$$: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ **……………5分**

则 $AX=B$ 的同解方程组为： $\begin{cases} x_1=-x_3+2x_4-2 \\ x_2=x_3-x_4-3 \end{cases}$ ……………………7 分

接下来，随着对自由未知量 $\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4$ 的处置方式不同，有两种不同的求通解方法，下面逐一给出：

方法一：令 $\boldsymbol{x}_3=1,\boldsymbol{x}_4=0$，及 $\boldsymbol{x}_3=0,\boldsymbol{x}_4=1$，得：$AX=0$ 的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,1,\mathbf{0})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,0,\mathbf{1})^{\mathrm{T}}$； ………………………………9 分，

再令 $\boldsymbol{x}_3=0,\boldsymbol{x}_4=0$ 得 $AX=B$ 的一个特解为 $\boldsymbol{\alpha}=(-2,-3,0,\mathbf{0})^{\mathrm{T}}$， ………………10 分

从而 $AX=B$ 的通解为： $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha},(\forall k_1,k_2\in R)$。 ……………………12 分

（**注**：这种通解已经给出了方程组解的结构，无需另行说明。）

方法 2：令 $x_3=k_1$，$x_4=k_2$，求得通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}(\forall k_1,k_2\in R)$$ …………9 分

此式表明：方程组的通解是它的一个特解与 $AX=0$ 的通解的和，这里的 $(-2,-3,0,\mathbf{0})^{\mathrm{T}}$ 是特解，$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,1,\mathbf{0})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,0,\mathbf{1})^{\mathrm{T}}$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系。 …………12 分

（**注**：对利用方法 2 只给出 $AX=B$ 的通解的，最多得 9 分）

七.（12 分）

设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\3\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-4\\5\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}3\\-2\\7\\-1\end{pmatrix}$，记为 A：.

（1）求向量组 A：的秩；

（2）求向量组 A：的一个最大无关组 A_0：;

（3）请用最大无关组 A_0：线性表示在向量组 A:中但非 A_0：中的向量。

解： 令 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&2&0&3\\2&0&-4&-2\\-1&3&5&7\\1&0&-2&-1\end{pmatrix}$ …………2 分

对矩阵 A 实施行初等变换化为行最简形:

$$A\sim\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&-4&-4&-8\\0&5&5&10\\0&-2&-2&-4\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&2&0&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}:\begin{pmatrix}1&0&-2&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ ……6 分

由此得：向量组 A:的秩为 2, ………………………………………………8 分

一个最大无关组 A_0 :为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$。 ………………………………10 分

在向量组 A:中但非 A_0：中的向量是 $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$,用 A_0：分别表示为：

$\boldsymbol{\alpha}_3=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$。 ……………………………………………12 分

八．（12 分）

求方阵$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$的特征值和特征向量。

解：矩阵$\boldsymbol{A}$的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & -1 \\ -3 & \lambda-1 & -3 \\ -4 & 0 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-7\lambda+6)\text{；}$$

由此得$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=6$，……………………………6 分

解方程组$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})X=\boldsymbol{0}$得基础解系

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T,\alpha_2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\end{pmatrix}^T\text{。}$$

因此，矩阵$\boldsymbol{A}$ 对应于$\lambda_1=\lambda_2=1$的全部特征向量为

$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$（$\forall k_1,k_2\in R$且不全为零）．……………………9 分

解方程组$(6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})X=\boldsymbol{0}$得基础解系$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,4)^{\mathrm{T}}$．因此，矩阵$\boldsymbol{A}$对应于$\lambda_3=6$的全部特征向量为$k\boldsymbol{\alpha}_3$，（$k$不为零）．……………………12 分

九．证明题（本题满分 8 分）

证明：如果非齐次线性方程组$AX=B$的解不唯一，那么它的一个解向量和它的导出组的一个基础解系所构成的向量组一定线性无关。

证明：不妨设$\boldsymbol{A}$是 n 列的矩阵且其秩为r ．……………………1 分

因为$AX=B$（$\boldsymbol{B}\neq 0$）的解不唯一，所以$R(\boldsymbol{A},B)=R(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}<\mathrm{n}$且$AX=0$的基础解系有 n-r 个解向量.……………………………2 分

若β是$AX=B$的一个解， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$是$AX=0$一个基础解系，则

$A\beta=B$， $A\alpha_i=0,i=1,2,...,n-r$，且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性无关。…………4 分

设$\boldsymbol{k}_1\alpha_1+\boldsymbol{k}_2\alpha_2+\boldsymbol{...}+\boldsymbol{k}_{n-r}\alpha_{n-r}+\boldsymbol{k}\beta=0$（*）………………………………………5 分

（*）式两端左乘$\boldsymbol{A}$并利用相关条件化简得：$k(A\beta)=kB=0$，因$\boldsymbol{B}\neq 0$故$\boldsymbol{k}=0$

把$\boldsymbol{k}=0$代入（*）式得$\boldsymbol{k}_1\alpha_1+\boldsymbol{k}_2\alpha_2+\boldsymbol{...}+\boldsymbol{k}_{n-r}\alpha_{n-r}=0$，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性无关，所以$\boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{...}=\boldsymbol{k}_{n-r}=0$. 至此知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性无关。……………………………………………………8 分