院、系领导审批并签名		A 卷

广州大学 2014-2015 学年第一学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ1（64 学时） 考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	15	15	14	11	12	18	8	7			100	
得 分												

一、填空题（每空 3 分，本大题满分 15 分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{3x^2}\sin x=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

2．曲线 $y=2x^3+1$ 在点 $(1,\ 3)$ 处的法线方程是 $\underline{\quad x+6y-19=0 \quad}$.

3．设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=$ $\underline{\quad -f'(x_0) \quad}$.

4．曲线 $y=x^3-3x^2$ 的拐点坐标为 $\underline{\quad (1,\ -2) \quad}$.

5．当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 与 ax^2 为等价无穷小，则 $a=$ $\underline{\quad 1/2 \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，本大题满分 15 分）

1．函数 $y=\ln\sin x$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$ 上满足罗尔定理的 $\xi=$（ C ）.

（A）0； （B）$\dfrac{\pi}{6}$； （C）$\dfrac{\pi}{2}$； （D）$\dfrac{5\pi}{6}$.

2．函数 $f(x)$ 在某点极限存在是函数在该点连续的（ B ）.

（A）充分条件； （B）必要条件； （C）充要条件； （D）无关条件.

3．下列说法正确的是（ B ）.

（A）两个无穷大的和是无穷大； （B）零是无穷小；

（C）无穷小与无穷大的乘积是无穷小； （D）无穷小与无穷小的商是无穷小.

4．$\int_0^{+\infty}e^{-x}\,\mathrm{d}x=$（ A ）.

（A）1； （B）-1； （C）$+\infty$； （D）$-\infty$.

5．设 $f(x)=(1+\frac{1}{x^2})^{-x^2}$，若定义 $f(0)=$（　D　），则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

（A）e；　　（B）$\frac{1}{e}$；　　（C）0；　　（D）1.

三、解答下列各题（每小题 7 分，本大题满分 14 分）

1．设 $y=\arctan x$，求 $y'''(0)$.

解：$y'=\frac{1}{1+x^2}$，$y''=-\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot(1+x^2)'=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$，------4 分

$$y'''=-\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

$y'''(0)=-2$．------7 分

2．求曲线 $xy+\ln y=1$ 在点 $M(1,\ 1)$ 处的切线方程.

解：在曲线方程两边同时对自变量 x 求导，得

$$y+xy'+\frac{1}{y}y'=0，\text{------4 分}$$

将 $x=1$，$y=1$ 代入上式，得 $y'\big|_{x=1,\ y=1}=-\frac{1}{2}$，于是点 $M(1,\ 1)$ 处的切线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\text{，即 } x+2y-3=0.\text{-----7 分}$$

四、（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\frac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}$，试判断间断点 $x=0$，$x=\pm 1$ 的类型，请精确到是第几类中的什么间断点.

解：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x^2+x}{-x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x-1}=-1$，

所以 $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点. ------5 分

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}=\infty,$$

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的无穷间断点.------8 分

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{-x(x^2-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2},$$

所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.------11 分

五、计算下列极限（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{(x+2)-2}\right]^{2}$ ------3 分

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{2}\left(1+\dfrac{1}{x+2}\right)^{-4}=e^{2}$. ------6 分

2．$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}$ ------3 分

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1$． ------6 分

六、计算下列积分（每小题 6 分，本大题满分 18 分）

1．$\displaystyle\int\frac{1}{x^2-8x+25}\mathrm{d}x$.

解：原式$=\displaystyle\int\frac{1}{(x-4)^2+9}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\left(\dfrac{x-4}{3}\right)^2+1}\mathrm{d}\left(\frac{x-4}{3}\right)$ ------4 分

$=\dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{x-4}{3}+C$. ------6 分

2．$\displaystyle\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解：$\displaystyle\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=\int\sin x\,\mathrm{d}e^x=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$ ------3 分

$\displaystyle=e^x\sin x-\int\cos x\,\mathrm{d}e^x=e^x\sin x-(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x)$

$\displaystyle=e^x(\sin x-\cos x)-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$， ------5 分

$\displaystyle\therefore\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$ ------6 分

3. $\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解：令 $t=\sqrt{2x+1}$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，$\mathrm{d}x=t\,\mathrm{d}t$，当 $x=0$ 时，$t=1$，当 $x=4$ 时，$t=3$，

$$原式=\int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}\cdot t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3 (t^2+3)\,\mathrm{d}t \quad \text{------4 分}$$

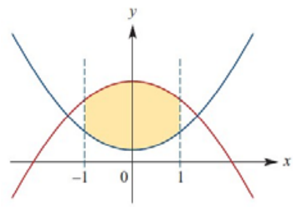
$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{3}t^3+3t]_1^3=\frac{22}{3}. \quad \text{------6 分}$$

七、（本题满分 8 分）

计算曲线 $y=x^2+1$ 和 $y=4-x^2$，以及直线 $x=1$ 和 $x=-1$ 所围成的区域面积.

解：所围区域如图所示. ------2 分

所求面积为



$$A=\int_{-1}^1 (3-2x^2)\,\mathrm{d}x \quad \text{------5 分}$$

$$=[3x-\frac{2x^3}{3}]_{-1}^1=\frac{14}{3}. \quad \text{------8 分}$$

八、（本题满分 7 分）

试证明：当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2$.

证明：令 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}, \quad \text{------3 分}$$

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)>f(0)=0$，即

$$\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2>0，也即 \ln(1+x)>x-\frac{1}{2}x^2. \quad \text{------7 分}$$