院、系领导审批并签名		B 卷

广州大学 2013-2014 学年第二学期考试卷答案

课 程：高等数学Ⅱ2　　　　　　考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	15	21	14	24	16	10					100	
得 分												

一、填空题（每空 3 分，本大题满分 15 分）

1．设 $z=\sin x\cos y$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos x\cos y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\sin x\sin y$.

2．$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\sqrt{xy+1}}{xy}=-\dfrac{1}{2}$.

3．已知 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，则 $f_y(0,0)=0$.

4．$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=2$，其中 $D:0\le x\le 1,0\le y\le 2$.

二、解答下列各题（每小题 7 分，本大题满分 21 分）

1．求函数 $z=3x^2y+\dfrac{x}{y}$ 的偏导数和全微分.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=6xy+\dfrac{1}{y}$，------2 分 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3x^2-\dfrac{x}{y^2}$，------5 分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=(6xy+\frac{1}{y})\mathrm{d}x+(3x^2-\frac{1}{y^2})\mathrm{d}y.$$ ------7 分

2．设 $z=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，$u=x^2-y^2$，$v=xy$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$．

解：$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}$------2 分

$=-2yf_u+xf_v$，------4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-4\,\mathrm{x}\,yf_{uu}+(2x^2-2y^2)f_{uv}+f_v+xyf_{vv}$------7 分

3．设由方程 $e^{2z}-xyz=0$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$．

解：令 $F=e^{2z}-xyz$，则 $F_x=-yz$，$F_z=2e^{2z}-xy$，------3 分

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=\dfrac{yz}{2e^{2z}-xy}$．------5 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{yz}{2e^{z}-xy})\quad=\dfrac{4y^2z-y^2z^2e^{2z}-4xzy^3}{(2e^{2z}-xy)^3}$．------7 分

三、（本题满分 14 分）

求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-24x$ 的极值.

解：解方程组

$$\begin{cases} f_x=3x^2+6x-24=0 \\ f_y=-3y^2+6y=0 \end{cases}，\text{------4 分}$$

得驻点 $(2,\ 0)$，$(2,\ 2)$，$(-4,\ 0)$，$(-4,\ 2)$．------6 分

$A=f_{xx}=6x$，$B=f_{xy}=0$，$C=f_{yy}=-6y$．------8 分

在点 $(-4,\ 0)$ 处，$AC-B^2=-24<0$，所以 $f(-4,\ 0)$ 不是极值；------9 分

在点 $(-4,\ 2)$ 处，$AC-B^2=-24<0$，所以 $f(0,\ -1)$ 不是极值；------10 分

在点 $(2,\ 0)$ 处，$AC-B^2=12>0$，且 $A=12>0$，

所以 $f(2,\ 0)=-4$ 为极小值；------12 分

在点 $(2,\ 2)$ 处，$AC-B^2=-144<0$，

所以 $f(2,2)$ 不是极值.------14 分

四、解答下列各题（每小题 8 分，本大题满分 24 分）

1．计算$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由$y=x, y=\frac{x}{3}, x=2$所围成的有界闭区域.

解：$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y$------4 分

$=\int_0^2 \frac{2}{3}\mathrm{sinx}\,\mathrm{d}x$------6 分

$=\frac{2}{3}(1-\cos 2)$. ------8 分

2．计算$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由曲线$x^2+y^2=1$所围成的有界闭区域.

解：$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\delta=\iint\limits_D e^{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$------3 分

$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho$------5 分

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^{\rho^2}\,\mathrm{d}\rho^2$------6 分

$=\pi(\mathrm{e}-1)$------8 分

3．计算由四个平面$x=0, y=0, x=1, y=1$所围成的柱体被平面$z=0$，$2x+3y+z=7$截得的立体的体积。

解：$V=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(7-2x-3y)dx$------4 分

$=\frac{9}{2}$------8 分

五、解答下列各题（每小题 8 分，本大题满分 16 分）

1．求微分方程 $y'-\dfrac{y}{x}=2x^2$ 的通解.

解：由通解公式得

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}(\int 2x^2\cdot e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)\text{------4 分}$$

$$=Cx+x^3.\text{------8 分}$$

2．求微分方程 $y''+4y'+4y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=0$ 的特解.

解：特征方程为 $r^2+4r+4=0$，特征根为 $r_1=r_2=-2$，

通解为 $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$. ------4 分

$$y'=-2C_1e^{-2x}+C_2(1-2x)e^{-2x},$$

由初始条件 $y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=0$，得 $C_1=2$，$C_2=4$.

所求特解为 $y=2e^{-2x}+4xe^{-2x}$. ------8 分

六、（本题满分 10 分）

一个煮熟了的鸡蛋有 $98\ ^{\circ}C$，把它放在 $18\ ^{\circ}C$ 的水池里，10 分钟后，鸡蛋的温度是 $38\ ^{\circ}C$. 假定没有感到水变热，鸡蛋冷却到 $20.5\ ^{\circ}C$ 需要多长时间？

解：从鸡蛋放在水池里起开始记时，设在时刻 t 鸡蛋的温度为 $T(t)$，那么根据冷却定律得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-18)\text{，其中 } k>0 \text{ 为冷却系数. ------2 分}$$

方程分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}T}{T-18}=-k\,\mathrm{d}t$，两边积分得 $\ln(T-18)=-kt+C$. ------5 分

由 $T(0)=98$ 得 $C=\ln 80$，再由 $T(5)=38$ 得 $k=\dfrac{\ln 4}{10}$. ------8 分

令 $T(t)=20.5$，得 $t=25$. ------10 分

鸡蛋冷却到 $23\ ^{\circ}C$ 需要再经过 15 分钟.