院、系领导 审批并签名		A 卷

广州大学 2013-2014 学年第一学期考试卷解答

课 程：高等数学Ⅱ（64 学时） 考 试 形 式：闭卷考试

学院:____________ 专业班级:__________ 学号:____________ 姓名:___________

题 次	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总 分	评卷人
分 数	15	15	18	7	12	10	15	8			100	
得 分												

一．填空题（每空 3 分，本大题满分 15 分）

1． $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3\sin x}{3x}=\underline{\dfrac{1}{3}}$．

2．曲线 $y=2x^3+1$ 在点 $(1,\ 3)$ 处的切线方程是 $\underline{y-3=6(x-1)}$.

3．函数 $y=3x^4-4x^3+1,\ x\in[\dfrac{1}{2},\ 1]$ 的拐点为 $\underline{(\dfrac{2}{3},\dfrac{11}{27})}$

4．若 $\int f(x)dx=\tan x^4+c$，则 $f(x)=\underline{4x^3\sec^2(x^4)}$.

5．设 $y=f(x^3)$，且 $y=f(u)$ 可导, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\underline{3x^2f'(x^3)}$.

二．选择题（每小题 3 分，本大题满分 15 分）

1．当 $x\to 0$ 时，$\sin x^4$ 是 x^4 的（ D ）无穷小.

(A) 高阶；　(B) 低阶；　(C) 同阶但不等价；　(D) 等价.

2．函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导的（ B ）.

(A) 充分条件；　(B) 必要条件；

(C) 充要条件；　(D) 无关条件.

3． $\int F'(x)dx=$（ D ）.

(A) $F(x)$；　(B) $F(x)-F(a)$；　(C) $dF(x)$；　(D) $F(x)+C$.

4． $\int_0^{+\infty}e^{-5x}dx=$（ A ）.

(A) 1/5；　(B) 1；　(C) 3；　(D) 5.

5．设 $f(x)=\begin{cases}3\cos x, x\ge 0\\ e^x+a, x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$（ D ）.

(A) 0；　(B) -1；　(C) 1；　(D) 2.

三．计算下列极限（每小题 6 分，本大题满分 18 分）

1． $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$．

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}\cos(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$

$=\cos(\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}))$ ------2 分

$=\cos(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}})=1$ ------6 分

2． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$．

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$ ------3 分

$=2$ ------6 分

3． $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^{\frac{2x}{\sin x}}$ ------3 分

$=e^2$ ------6 分

四．讨论 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性.（本题满分 7 分）

解：$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=0=f(0)$，------2 分

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，------3 分

$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\dfrac{1}{\Delta x}=0$ ------6 分

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. ------ 7 分

五．解答下列各题（每小题 6 分，本大题满分 12 分）

1．求 $y=e^{-3x}\cos 5x$ 的微分和二阶导数.

解：$dy=y'dx$ ------2 分

$=(-3e^{-3x}\cos 5x-5e^{-3x}\sin 5x)dx$ ------4 分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=e^{-3x}(30\sin 5x-16\cos 5x)$ ------6 分

2．求由方程 $xy-\sin(\pi y^2)=0$ 所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

解：$y+x\dfrac{dy}{dx}-\cos(\pi y^2)(2\pi y\dfrac{dy}{dx})=0$ ------4 分

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2\pi y\cos(\pi y^2)-x}$ ------6 分

六．求 $y=(x-4)\sqrt[3]{(x+1)^2}$ 的单调区间和极值.（本题满分 10 分）

解：$y'=\sqrt[3]{(x+1)^2}+(x-4)\cdot\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{5(x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}}$，------3 分

令 $y'=0$，得驻点 $x=1$，另有不可导点 $x=-1$ ------5 分

当 $x>1$ 时，$y'(x)>0$，所以 y 在 $[1,\ +\infty)$ 上单调增加；------6 分

当 $-1<x<1$ 时，$y'(x)<0$，所以 y 在 $[-1,\ 1]$ 上单调减少；------7 分

当 $x<-1$ 时，$y'(x)>0$，所以 y 在 $(-\infty,\ -1]$ 上单调增加. ------8 分

极大值为 $y(-1)=0$，------9 分

极小值为 $y(1)=-3\sqrt[3]{4}$. ------10 分

七．计算下列积分（每小题 5 分，本大题满分 15 分）

1．$\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}$.

解：$\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}$ ------3 分

$=\dfrac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+c$ ------5 分

2．$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

解：令 $x=\sec t$，则 $dx=\sec t\tan tdt$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\int \sec tdt$$ ------3 分

$$=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+c_1=\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$$ ------5 分

3．$\int_0^{\frac{1}{2}}\arccos xdx$.

解：$$\int_0^{\frac{1}{2}}\arccos xdx=x\arccos x\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$ ------2 分

$$=\frac{\pi}{6}-[\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$ ------5 分

八．求 $y=x-4$ 与 $y^2=2x$ 围成图形的面积 S .（本题满分 8 分）

解：$$S=\int_{-2}^{4}(y+4-\frac{y^2}{2})dy$$ ------4 分

$=18$ ------8 分