第三节　高阶线性微分方程

一、高阶线性微分方程

二、常系数齐次线性微分方程

三、二阶常系数非齐次线性微分方程

一、高阶线性微分方程

1、二阶线性微分方程

2、线性微分方程的解的结构

复习

一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$

通解为 $y = e^{-\int P(x)dx}[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C]$

$$= \underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}$$

对应齐次方程通解Y

非齐次方程特解 y^*

注 一阶线性方程解的结构及解非齐次方程的常数变易法对高阶线性方程也适用.

1、二阶线性微分方程

形如 $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}} + P(x)\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} + Q(x)\boxed{y} = f(x)$$

二阶线性微分方程

当 $f(x) \equiv 0$时，二阶线性齐次微分方程.

当 $f(x) \not\equiv 0$时，二阶线性非齐次微分方程.

n阶线性微分方程的一般形式为

$$\boxed{y^{(n)}}+P_1(x)\boxed{y^{(n-1)}}+\Lambda+P_{n-1}(x)\boxed{y'}+P_n(x)\boxed{y}=f(x)$$

其中$p_1(x), p_2(x),\Lambda\ , p_n(x)$为线性微分方程的系数，

$f(x)$为线性微分方程的自由 项.

当 $f(x)\equiv 0$时，n阶线性齐次微分方程.

当 $f(x)\not\equiv 0$时，n阶线性非齐次微分方程.

2、线性微分方程的解的结构

(1)二阶齐次方程解的结构

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

定理 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程(1)的两个解，那末$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$也是(1)的解，($C_1, C_2$是常数).

叠加原理

证 $[C_1y_1'' + C_2y_2''] + P(x)[C_1y_1' + C_2y_2']$

$+ Q(x)[C_1y_1 + C_2y_2]$

$$= C_1\underbrace{[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1]}_{=0} + C_2\underbrace{[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2]}_{=0}$$

$= 0$

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ 一定是通解

定义 设$y_1, y_2, \Lambda\ , y_n$ 为定义在区间I内的n个函数.
如果存在n个不全为零的常数，使得当x在该区间内恒等式成立

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \Lambda\ + k_n y_n \equiv 0$$

那末称这n个函数在区间I内 **线性相关.**
否则称 **线性无关.**

如 $1, \cos^2 x, \sin^2 x \ (x \in (-\infty, +\infty))$ 线性相关

e ……性无关

取$k_1 = 1, k_2 = k_3 = -1$,有恒等式

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

特别地 若在I上有 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数,

则函数$y_1(x)$与$y_2(x)$在I上 线性无关.

定理 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程(1)的两个线性无关的特解,那末 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 也是(1)的通解.

为了求二阶齐次线性方程的通解,
只要求它的两个线性无关的特解.

如 $y'' + y = 0$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$,

且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \not\equiv$ 常数, 通解 $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

可推广到n阶齐次线性方程.

推论 如果函数$y_1(x), y_2(x), \Lambda\ , y_n(x)$是$n$ 阶齐次线性方程

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \Lambda\ + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0$$

的n 个线性无关的解，那么，此方程的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \Lambda\ + C_n y_n(x),$$

其中 $C_1, C_2, \Lambda\ C_n$为任意常数.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$$

(2)二阶非齐次线性方程的解的结构

定理 设y^*是二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

的一个特解, Y是与(2)对应的齐次方程(1)的通解, 那么$y = Y + y^*$是二阶非齐次线性微分方程(2)的通解.

为了求非齐次线性方程的通解, 只要求得: 非齐次线性方程的一个特解和对应齐次线性方程的通解.

例1 方程 $y''+y=x^2$ 是二阶**非齐次**线性方程

已知 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$ 是对应齐次方程

$y''+y=0$ 的通解. 又容易验证

$y^*=x^2-2$ 是所给方程的一个特解.

$\therefore\ y=Y+y^*$

$=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2$

是**非齐次**方程的通解.

定理 如果 y_1,y_2 是非齐次方程(2)的两个解,

则y_1-y_2 是对应齐次方程(1)的解.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

定理 设非齐次方程 (2)的右端 $f(x)$是几个函数之和, 如$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

而y_1^*与y_2^*分别是

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解, 那么 $y_1^* + y_2^*$ 就是原方程的特解.

解的叠加原理

定理也可推广到n 阶非齐次线性方程.

例2 求解 $y'' + y = \boxed{x + e^x}$

解 $y'' + y = 0$ 的通解是 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

再考虑两个方程 $y'' + y = x$, $y'' + y = e^x$

对于 $y'' + y = x$, 其特解为 $y_1^* = x$,

对于 $y'' + y = e^x$, 其特解为 $y_2^* = \frac{1}{2} e^x$,

$y^* = y_1^* + y_2^* = x + \frac{1}{2} e^x$ 是原方程的特解 .

原方程通解为

$$y = Y + y* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + \frac{1}{2} e^x .$$

练习 已知微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x,\ y_2 = e^x,\ y_3 = e^{2x}$，求此方程满足初始条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$ 的特解 .

解 $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$， 得 $C_1 = -1,\ C_2 = 2$，

故所求特解为 $y = 2e^{2x} - e^x$.

定理 如果$y=y_1(x)+iy_2(x)$是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+if_2(x)$$

的解(复值解)，其中$P(x), Q(x), f_1(x), f_2(x)$, $y_1(x), y_2(x)$是实值函数，则$y_1(x)$和$y_2(x)$分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的解.

解二阶线性齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+P(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Q(x)y=0 \quad (1)$$

只要求两个线性无关的解 y_1, y_2

则方程的通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2$

解二阶线性非齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+P(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+Q(x)y=f(x) \quad (2)$$

先求（1）的两个线性无关的解 y_1, y_2

再求（2）的一个特解 y^*

则方程的通解为 $y=C_1y_1+C_2y_2+y^*$

作业

- P 129　2，4

二、常系数齐次线性方程解法

基本思路

求解常系数线性齐次微分方程

$\Big\downarrow$ 转化

求特征方程(代数方程)之根

1. 定义

形如 $y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \Lambda + P_{n-1} y' + P_n y = f(x)$

*n*阶常系数 线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

二阶常系数 齐次线性 方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

二阶常系数非齐次线性方程

2. 二阶常系数线性齐次微分方程解法

---特征方程法

$$y'' + py' + qy = 0$$ 二阶常系数齐次线性方程

设解 $y = e^{rx}$ 其中r为待定常数. 将其代入方程, 得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0 \qquad \because e^{rx} \neq 0,$$

故有 $r^2 + pr + q = 0$ 特征方程

特征根 $$r_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

特征根r的不同情况决定了方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解的不同形式.

设解$y=e^{rx}$

$$r^2+pr+q=0$$ 特征方程

(1)有两个不相等的实根 $(\Delta>0)$

$$r_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad r_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2},$$

两个线性无关的特解

$$y_1=e^{r_1x},\quad y_2=e^{r_2x},\quad \frac{y_1}{y_2}\neq\text{常数}$$

得齐次方程的通解为 $\boxed{y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}}$

(2)有两个相等的实根 $(\Delta=0)$

设解 $y=e^{rx}$

$\dfrac{y_2}{y_1}\neq$ 常数

$r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$, 一特解为 $y_1=e^{r_1x}$,

设 $y_2=u(x)e^{r_1x}$, 其中$u(x)$为待定函数.

将 y_2, y_2', y_2'' 代入到 $y''+py'+qy=0$. 化简得

$$u''+\underbrace{(2r_1+p)}_{=0}u'+\underbrace{(r_1^2+pr_1+q)}_{=0}u=0,$$

知 $u''=0$, 取 $u(x)=x$, 则 $y_2=xe^{r_1x}$,

得齐次方程的通解为 $y=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x}$

$$\boxed{y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}}$$

(3)有一对共轭复根 $(\Delta < 0)$

设解$y = e^{rx}$

$$r_1 = \alpha + i\beta, \qquad r_2 = \alpha - i\beta,$$

这时原方程有两个复数解

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

为了得到实数形式的线性无关解, 利用解的叠加原理

$$\overline{y_1} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\overline{y_2} = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$\frac{\overline{y_2}}{\overline{y_1}} \neq \text{常数}$$

得齐次方程的通解为

$$\boxed{y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)}$$

综上， $y'' + p y' + q y = 0$ （p, q为常数)

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$， 特征根 r_1, r_2

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$的根	方程 $y'' + py' + qy = 0$的通解
两个不相等的实根 r_1, r_2	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
两个相等的实根 $r_1 = r_2 = r$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$
一对共轭复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

由常系数齐次线性方程的特征方程的根
确定其通解的方法称为特征方程法.

二阶常系数齐次线性方程 $y'' + py' + qy = 0$

求通解的步骤:

(1) 写出相应的特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

(2) 求出特征根

(3) 根据特征根的不同情况,得到相应的通解

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

例3 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解 特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$,

特征根 $r_1 = -1, r_2 = 3$,

因此原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

例4 解初值问题 $\begin{cases} 16y'' - 24y' + 9y = 0, \\ \boxed{y\big|_{x=0} = 4}, \quad y'\big|_{x=0} = 2. \end{cases}$

解 特征方程 $16r^2 - 24r + 9 = 0$

特征根 $r_{1,2} = \dfrac{3}{4}$ （2重根）

所以方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{3}{4}x}$

$\Rightarrow C_1 = 4 \Rightarrow y' = \left((4 + C_2 x)e^{\frac{3}{4}x}\right)'$

$\Rightarrow y' = \left(3 + C_2 + \dfrac{3}{4}C_2 x\right)e^{\frac{3}{4}x}$

$\Rightarrow C_2 = -1$ 特解 $y = (4 - x)e^{\frac{3}{4}x}$.

例5 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解 特征方程 $r^2+2r+5=0$

特征根 $r_{1,2}=-1\pm 2i$,

故所求通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

作业

- P133　1（1），（2），（6），（7）
- 　　　　2（1）

3. n阶常系数线性齐次微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \Lambda + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \quad (a_k \text{ 均为常数})$$

特征方程 $r^n + a_1 r^{n-1} + \Lambda + a_{n-1} r + a_n = 0$

(1)若特征方程含 k 重实根 r，

可得原方程k个线性无关解

$$e^{rx},\ xe^{rx},\ x^2 e^{rx},\ \Lambda,\ x^{k-1}e^{rx}.$$

则其通解中必含对应项

$$C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} + \Lambda\ C_k x^{k-1} e^{rx}$$
$$= (C_1 + C_2 x + \Lambda + C_k x^{k-1}) e^{rx}$$

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=0\ \ (a_k \text{ 均为常数})$$

特征方程 $\quad r^n+a_1 r^{n-1}+\cdots+a_{n-1}r+a_n=0$

(2)若特征方程含 k 重复根 $\quad r=\alpha\pm i\beta$,

可得原方程2k个线性无关解

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \ldots\quad ,x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \cdots\quad ,x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

则其通解中必含对应项

$$e^{\alpha x}(C_1+C_2x+\cdots+C_k x^{k-1})\cos\beta x+$$

$$+e^{\alpha x}(D_1+D_2x+\cdots+D_k x^{k-1})\sin\beta x$$

(以上 C_i, D_i 均为任意常数)

注意

n次代数方程有n个根, 而特征方程的**每一个根**都对应着**通解**中的**一项**，且每一项各有一个任意常数.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \Lambda + C_n y_n$$

例6 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

解 特征方程 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0,$

即 $r^2(r^2 - 2r + 5) = 0.$

特征根 $r_1 = r_2 = 0$ 和 $r_{3,4} = 1 \pm 2i.$

可得原方程4个线性无关解

$$e^{0x},\ xe^{0x};\ \ e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$$

即 $1,\ \ x,\ \ e^x \cos 2x,\ \ \ e^x \sin 2x$

故所求通解为

$$y = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x).$$

例7 求方程

$$y^{(5)}+y^{(4)}+2y'''+2y''+y'+y=0$$ 的通解.

解 特征方程 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0$

$$(r+1)(r^2+1)^2=0$$

特征根 $r_1=-1$(单根), $r_{2,3}=\pm i$(二重)共轭复根,

对应的特解 $y_1=e^{-x}$, $y_2=\cos x$, $y_3=x\cos x$,

$$y_4=\sin x,\quad y_5=x\sin x$$

故所求通解

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x$$

例8 求一个以 $y_1 = e^x,\ y_2 = 2xe^x,\ y_3 = \cos 2x,$ $y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的4阶常系数线性齐次微分方程, 并求其通解 .

解 根据给定的特解知特征方程有根

$$r_1 = r_2 = 1,\quad r_{3,4} = \pm 2i$$

因此特征方程为 $(r-1)^2(r-2i)(r+2i) = 0$

即 $$r^4 - 2r^3 + 5r^2 - 8r + 4 = 0$$

故所求方程为 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0$

其通解为

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + C_3\cos 2x + C_4\sin 2x.$$

内容小结

1. 二阶常系数齐次线性方程解法

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征方程 $r^2 + p\,r + q = 0$， 特征根 r_1, r_2

特 征 根	通　　解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

2. n阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \Lambda + P_{n-1} y' + P_n y = 0$$

特征方程 $$r^n + P_1 r^{n-1} + \Lambda + P_{n-1} r + P_n = 0$$

特征方程的根	通解中的对应项
r是k重根	$(C_0 + C_1 x + \Lambda + C_{k-1} x^{k-1}) e^{rx}$
r是k重共轭复根$\alpha \pm j\beta$	$e^{\alpha x}[(C_0 + C_1 x + \Lambda + C_{k-1} x^{k-1}) \cos \beta x$ $+ (D_0 + D_1 x + \Lambda + D_{k-1} x^{k-1}) \sin \beta x]$

选择题

1. 设函数 $p(x), q(x), f(x)$都连续， $f(x)\not\equiv 0$,

y_1, y_2, y_3都是$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$的解，

则它必定有解（ C ）

$(A)\, y_1 + y_2 + y_3$;　　　　$(B)\, -y_1 - y_2 - y_3$;

$(C)\, y_1 + y_2 - y_3$;　　　　$(D)\, y_1 - y_2 - y_3$.

2. 设函数$p(x), q(x), f(x)$都连续，且 $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_3(x)$是非齐次线性微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$的通解，则(**B**)

(A) $y_1 + y_2 - y_3$是方程的解；

(B) y_1, y_2, y_3线性无关；

(C) y_1, y_2, y_3线性相关；

(D) y_1, y_2, y_3可能线性相关，也可能线性无关．

3. 设 $y_1(x), y_2(x)$是二阶齐次线性微分方 程

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$的两个特解，则由 $y_1(x)$与

$y_2(x)$能构成该方程的通解，其充分条件为(**B**)

$(A)\ y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) = 0;$

$(B)\ y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0;$

$(C)\ y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x) = 0;$

$(D)\ y_1(x)y_2'(x) + y_2(x)y_1'(x) \neq 0.$

4. 在下列微分方程中，以

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x \quad (c_1, c_2, c_3\text{为任意常数})$$

为通解的是（ D ）

(A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$;

(B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$;

(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$;

(D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

三、常系数非齐次线性微分方程

解二阶常系数线性微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=f(x) \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0 \quad (1)$$

先求（1）的两个线性无关的解 y_1, y_2

再求（2）的一个特解 y^*

则方程的通解为 $y=c_1y_1+c_2y_2+y^*$

$y'' + py' + qy = f(x)$ 二阶常系数非齐次线性方程

难点：如何求特解y^* ？

(1)对其对应的齐次方程的通解，利用*常数变易法可求通解，但较繁.

(2)对常见的 $f(x)$，用待定系数法求特解.

$f(x)$ 常见类型

1.$P_m(x)e^{\lambda x}$型，　特别：$P_m(x)$.

2. $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型

特别：$P_m(x)e^{\lambda x}\cos\beta x$，　$P_m(x)e^{\lambda x}\sin\beta x$.

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型, $P_m(x)$是m次多项式

$$\boxed{y''+py'+qy=P_m(x)e^{\lambda x}}\qquad \boxed{r^2+pr+q=0,}$$

设非齐方程特解为 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 求导代入原方程

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+\underbrace{(\lambda^2+p\lambda+q)}_{\neq 0}Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若λ不是特征方程的根

可设 $Q(x)=Q_m(x)$ $\qquad$ $\boxed{y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}}$

(2) 若λ是特征方程的单根

$$Q''(x)+\underbrace{(2\lambda+p)}_{\neq 0}Q'(x)+\underbrace{(\lambda^2+p\lambda+q)}_{=0}Q(x)=P_m(x)$$

可设 $Q(x)=xQ_m(x)$, $\qquad$ $\boxed{y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}}$

$$y'' + py' + qy = P_m(x)e^{\lambda x} \qquad r^2 + pr + q = 0$$

(3) 若λ是特征方程的重根

$$Q''(x) + \underbrace{(2\lambda + p)}_{=0}Q'(x) + \underbrace{(\lambda^2 + p\lambda + q)}_{=0}Q(x) = P_m(x)$$

可设 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$, $\quad y^* = x^2 Q_m(x)e^{\lambda x}$

综上讨论

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$, $k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$

注 上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程(k是重根次数).

例9 求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 此题 $f(x)=xe^{2x}$ 属于 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型.

其中 $m=1,\ \lambda=2$

(1) 求对应齐次方程的通解

特征方程 $r^2-3r+2=0$

特征根 $r_1=1,\ r_2=2$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

(2) 求非齐次方程的特解 $\because \lambda=2$ 是单根,

设 $y^*=x^{1}(Ax+B)e^{2x}$?

求方程 $y'' - 3y' + 2y = x e^{2x}$ 的通解.

对应齐次方程通解

$Y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$

$y^* = x(Ax + B)e^{2x}$

$$= (Ax^2 + Bx)e^{2x}$$

$$y^{*\prime} = (2Ax + B + 2Ax^2 + 2Bx)e^{2x}$$

$$y^{*\prime\prime} = (2A + 4Ax + 2B + 4Ax + 2B + 4Ax^2 + 4Bx)e^{2x}$$

$$= (2A + 4B + 8Ax + 4Ax^2 + 4Bx)e^{2x}$$

将 $y^*, y^{*\prime}, y^{*\prime\prime}$ 代入方程, 得

$$2Ax + B + 2A = x$$

求方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的通解.

对应齐次方程通解

$$Y = C_1e^x + C_2e^{2x}$$

$$y^* = x(Ax + B)e^{2x}$$

$$2Ax + B + 2A = x \quad \therefore \begin{cases} 2A = 1, \\ B + 2A = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -1 \end{cases}$$

于是 $y^* = x(\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$

原方程通解为 $y = Y + y^*$

$$= C_1e^x + C_2e^{2x} + x(\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}.$$

例10 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的通解.

解 此题 $f(x) = (3x+1)e^{0x}$ 属于 $P_m(x)e^{\lambda x}$ 型.

其中 $m = 1,\ \lambda = 0$

(1) 求对应齐次方程的通解

特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$

特征根 $r_1 = 3,\ r_2 = -1$

对应齐次方程通解 $Y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

(2) 求非齐次方程的特解 $\Theta\ \lambda = 0$ 不是单根,

设 $y^* = x^0 (Ax + B) e^{0x} = Ax + B$

求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解.

对应齐次方程通解

$$Y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}$$

$$y*=Ax+B$$

将 $y*, y*', y*''$ 代入方程，得

$$-2A-3(Ax+B)=3x+1$$

$$-3Ax+(-2A-3B)=3x+1$$

$$\therefore \begin{cases}-3A=3\\ -2A-3B=1\end{cases}, \Rightarrow \begin{cases}A=-1\\ B=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

于是 $y*=-x+\dfrac{1}{3}$

原方程通解为 $y=Y+y*$

$$=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-x+\frac{1}{3}.$$

练习 求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{\alpha x}$ 的通解（其中α为实数）.

解 特征方程 $r^2+4r+4=0$,特征根 $r_1=r_2=-2$

对应齐次方程通解 $Y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$

$\alpha\neq-2$ 时，令 $y^*=Ae^{\alpha x}$,代入原方程得 $A=\dfrac{1}{(\alpha+2)^2}$,

故原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{(\alpha+2)^2}e^{\alpha x}$.

$\alpha=-2$ 时，令 $y^*=Bx^2e^{\alpha x}$,代入原方程得 $B=\dfrac{1}{2}$,

故原方程通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^{\alpha x}$.

例11 设函数 $y=y(x)$满足微分方程 $\boxed{y''-3y'+2y=2e^x}$,其图形在点(0,1)处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$在该点处的切线重合，求函数y的解析表达式.

解 二阶常系数线性非齐次方程

此题$f(x)=2e^x$属于$P_m(x)e^{\lambda x}$型. $(m=0,\lambda=1)$

(1) 求对应齐次方程的通解

特征方程 $r^2-3r+2=0,$

特征根 $r_1=1,\ r_2=2,$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

设函数 $y=y(x)$满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$，其图形在点(0,1)处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$在该点处的切线重合，求函数y的解析表达式.

(2) 求非齐次方程的特解

$\lambda=1$特征根 $r_1=1$

设 $y^*=x^1Ae^x$ ($\lambda=1$是单根)

解得 $A=-2$ 即 $y^*=-2xe^x$

所以原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}-2xe^x$

(3) 求原方程的特解 (求函数y的解析表达式)

由$y=x^2-x+1$，得 $y'=2x-1$ 且 $y'(0)=-1$，

将点(0,1)的坐标代入通解，得

$$1=C_1+C_2$$

将通解 $\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x}$ 求导,得

$$\boxed{\begin{gathered} 1 = C_1 + C_2 \\ y'(0) = -1 \end{gathered}}$$

$$y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} - 2e^x - 2xe^x$$

由题意, 得 $y'(0) = C_1 + 2C_2 - 2 = -1$

即 $\qquad C_1 + 2C_2 = 1$

联立 $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$ 将之代入通解得

$$y = e^x - 2xe^x$$

所以,函数y的解析表达式为 $y = (1 - 2x)e^x$.

练习 微分方程 $y''-3y'+2y=3x-2e^{x}$ 的特解y^{*}的形式为 $y^{*}=($ **D** $)$.

A. $(ae^{x}+b)e^{x}$ B. $(ae^{x}+b)xe^{x}$

C. $(ax+b)+ce^{x}$ D. $(ax+b)+cxe^{x}$

解 对应的齐次微分方程 $y''-3y'+2y=0$

特征方程 $r^{2}-3r+2=0$

特征根 $r=1, r=2$

$y''-3y'+2y=3x$, $\lambda=0$不是特征根, $y_1^{*}=ax+b$

$y''-3y'+2y=-2e^{x}$, $\lambda=1$是特征单根, $y_2^{*}=cxe^{x}$

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

$$f(x)=e^{\lambda x}[P_l\cos\omega x+P_n\sin\omega x]$$

欧拉公式

$$=e^{\lambda x}[P_l\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+P_n\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}]$$

$$=(\frac{P_l}{2}+\frac{P_n}{2i})e^{(\lambda+i\omega)x}+(\frac{P_l}{2}-\frac{P_n}{2i})e^{(\lambda-i\omega)x}$$

$$=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}}$$

$$m=\max\{l,n\}$$

$$f(x)=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}+\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}},\quad m=\max\{l,n\}$$

$$y''+py'+qy=P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x},\quad y_1=x^kQ_me^{(\lambda+i\omega)x},$$

$$y''+py'+qy=\overline{P_m(x)e^{(\lambda+i\omega)x}},\quad \bar{y}_1=x^k\overline{Q}_me^{(\lambda-i\omega)x},$$

$$\therefore y^*=y_1+\bar{y}_1=x^ke^{\lambda x}[Q_me^{i\omega x}+\overline{Q}_me^{-i\omega x}]$$

$$=x^ke^{\lambda x}[Q_m(\cos\omega x+i\sin\omega x)+$$

欧拉公式

$$\overline{Q}_m(\cos\omega x-i\sin\omega x)]$$

$$=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$是 m次多项式,

$$y'' + py' + qy = f(x), \qquad r^2 + pr + q = 0$$

$$f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]\text{型}$$

$$\boxed{y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]}$$

记住!

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$是 m次多项式, $m = \max\{l, n\}$

$$k = \begin{cases} 0, & \lambda \pm i\omega\text{不是根} \\ 1, & \lambda \pm i\omega\text{是单根}, \end{cases}$$

注 上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程.

例12 求方程 $y''+y=4\sin x$ 的通解.

解 $f(x)=4\sin x \quad = e^{0x}(0\cos x+4\sin x)$

属于 $e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\right]$ 型.

(其中 $\lambda=0, \omega=1, \quad l=0, \quad n=0$)

(1) 求对应齐次方程 $\quad y''+y=0$ 的通解

特征方程 $\quad r^2+1=0$

特征根 $\quad r=\pm i$

其通解 $\quad Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

$$f(x)=e^{0x}(0\cos x+4\sin x)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lambda=0,\ \omega=1\\ l=n=0\end{array}}$$

(2) 求非齐次方程的特解. 设

特征根 $r=\pm i$

$$y^*=x^{\mathrm{b}}[A\cos x+B\sin x]=x(A\cos x+B\sin x)$$

$\lambda\pm i\omega=0\pm i$ 是特征根.

$$y^{*\prime}=(A\cos x+B\sin x)+x(-A\sin x+B\cos x)$$

$$y^{*\prime\prime}=2(-A\sin x+B\cos x)+x(-A\cos x-B\sin x)$$

代入方程, 整理得 $\quad -2A\sin x+2B\cos x=4\sin x$

$$\therefore\begin{cases}-2A=4,\\ 2B-=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-2\\ B=0\end{cases}\qquad \therefore\ y^*=-2x\cos x$$

齐次方程的通解为 $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

原方程的特解为 $y^* = -2x\cos x$

原方程通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\cos x.$$

例13 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解

解　特征方程　$r^2 + 1 = 0$

$\lambda = 0, \omega = 2,\quad \lambda \pm i\omega = \pm 2i$ 不是特征根,

故设特解为 $y^* = (a\,x + b)\cos 2x + (c\,x + d)\sin 2x$

代入方程得

$$(-3a\,x - 3b + 4c)\cos 2x - (3c\,x + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数，得 $\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d + 4a = 0 \end{cases}$　$\therefore\ a = -\dfrac{1}{3},\ d = \dfrac{4}{9}$

$$b = c = 0$$

于是求得一个特解　$y^* = -\dfrac{1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x\,.$

例14 求解方程 $y''+4y=\frac{1}{2}(x+\cos 2x)$.

解 特征方程 $r^2+4=0$, $r_{1,2}=\pm 2i$,

对应的齐方的通解为 $Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

设原方程的特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$.

(1) $y''+4y=\frac{1}{2}x$, $m=1, \lambda=0$ 不是特征根

设 $y_1^*=ax+b$, 代入方程得 $4ax+4b=\frac{1}{2}x$,

由 $\begin{cases} 4a=\frac{1}{2}, \\ 4b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\frac{1}{8}, \\ b=0, \end{cases}$ $\therefore y_1^*=\frac{1}{8}x$;

$$\boxed{r_{1,2}=\pm 2i,\quad Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x,\quad y_1^*=\frac{1}{8}x}$$

(2) $y''+4y=\dfrac{1}{2}\cos x,$

$m=0,\lambda=0,\omega=2,$ $\lambda\pm\omega i=\pm 2i$是特征根

设 $y_2^*=x(c\cos 2x+d\sin 2x),$

代入方程得 $4d\cos 2x-4c\sin 2x=\dfrac{1}{2}\cos 2x,$

由 $\begin{cases}4d=\dfrac{1}{2},\\ -4c=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}c=0,\\ d=\dfrac{1}{8},\end{cases}$ $\therefore y_2^*=\dfrac{1}{8}x\sin 2x;$

故原方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}x\sin 2x.$$

练习

1 . (填空) 设 $y'' + y = f(x)$　　$r_{1,2} = \pm i,$

1) 当 $f(x) = x\cos x$ 时可设特解为

$$y^* = x\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]$$

2) 当 $f(x) = x\cos 2x + e^{2x}$ 时可设特解为

$$y^* = (ax+b)\cos 2x + (cx+d)\sin 2x + k e^{2x}$$

提示　$f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x\right]$

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{n, l\}$$

2. 已知二阶常微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 有特解 $\underline{y=e^{-x}(1+xe^{2x})}$，求微分方程的通解.

解 将特解代入方程得恒等式

$$\underline{(1-a+b)}e^{-x}+\underline{(2+a)e^x}+\underline{(1+a+b)}xe^x=\underline{ce^x}$$

比较系数得 $\begin{cases}1-a+b=0\\2+a=c\\1+a+b=0\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}a=0\\b=-1\\c=2\end{cases}$

故原方程为 $y''-y=2e^x$

$$\boxed{y=e^{-x}+xe^x}$$

对应齐次方程通解 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x$

内容小结

1. 线性微分方程的概念及解的结构

2. 二阶常系数齐次线性方程解法

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征方程 $r^2 + pr + q = 0$， 特征根 r_1, r_2

特 征 根	通 解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

3. 常系数非齐次微分方程求特解　　待定系数法

(1) $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$, (λ可以是复数)

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$,

$$k=\begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根;} \\ 1 & \lambda\text{是单根;} \\ 2 & \lambda\text{是重根.} \end{cases}$$

(2) $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$,

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$是 m次多项式,$m=\max\{l,n\}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm i\omega\text{不是根;}\\ 1 & \lambda\pm i\omega\text{是单根.}\end{cases}$$

作 业　　习题138

1. (1);(3)

2. (2);(3)

3. (2);

4. 选做

第8章总复习

1. 可分离变量的微分方程

1）可分离变量 2）齐次

分离变量方法

2. 一阶线性微分方程

1） 一阶线性齐次微分方程

2） 一阶线性非齐次微分方程

常数变易方法

3. 二阶常系数线性微分方程

1） 二阶线性齐次微分方程

2） 二阶线性非齐次微分方程

特征方程方法

待定系数方法

注意以下几点

分清方程类型、阶数、线性还是非线性、齐次还是非齐次、常系数还是变系数

依据方程类型选择适当的方法：分离变量方法、公式方法、常数变易方法、特征方程方法、待定系数方法

对于有初始条件的微分方程， 先求方程的通解，再找满足条件的特解

实际问题的数学化

对于具体的应用问题：

1）引入适当的自变量和因变量；

2）实际问题转化为数学问题；

3） 列出相应的微分方程与初始条件；

4） 先求通解，再求特解

典型例题

例1、$(e^{(x+y)}-e^{x})dx+(e^{(x+y)}+e^{y})dy=0.$

例2、$(1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0.$

例3、 P157 总习题 6

典型例题续

例4、 $xy'\ln x + y = ax(\ln x + 1).$

例5、 $y'' - 3y' - 4y = 0, y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = -5.$

例6、 $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x};$