I　齐次方程

一、齐次方程

二、小结

一、齐次方程

定义 形如 $\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$ 的微分方程称为齐次方程.

解法 作变量代换 $u=\frac{y}{x}$, 即 $y=xu$,

则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,

代入原式 $u+x\frac{du}{dx}=f(u)$,

即 $\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}$.

可分离变量的方程

当 $f(u)-u\neq 0$时， 得 $\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|C_1x|$,

即$x=Ce^{\varphi(u)}$, （$\varphi(u)=\int\frac{du}{f(u)-u}$）

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入, 得通解 $x=Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}$,

当 $\exists u_0$，使 $f(u_0)-u_0=0$, 则 $u=u_0$是新方程的解,

代回原方程， 得齐次方程的解 $y=u_0x$.

例 1 求解微分方程

$$(x^2+2y^2)dx - xydy = 0.$$

解 方程化成 $\dfrac{dy}{dx} = 2\dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{\dfrac{y}{x}}$

令 $\dfrac{y}{x} = u,$ 则 $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{dy}{dx}.$

$$u + x\frac{du}{dx} = 2u + \frac{1}{u}$$

分离变量 $$\frac{u}{1+u^2}du=\frac{1}{x}dx$$

积分 $$\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln x+\frac{1}{2}\ln C$$

即 $$1+u^2=Cx^2$$

方程的通解为： $$x^2+y^2=Cx^4.$$

例 2 求解微分方程 $(1+e^{-\frac{x}{y}})ydx+(y-x)dy=0.$

解 （ $(1+e^{-\frac{x}{y}})\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-1,$

令 $\frac{x}{y}=u,$ 则 $\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy},$

$$(1+e^{-u})(u+y\frac{du}{dy})=u-1$$

分离变量 $\frac{1+e^{u}}{u+e^{u}}du=-\frac{1}{y}dy$

积分 $$\ln(u+e^{u})=-\ln y+\ln C$$

即 $$(u+e^{u})y=C$$

方程的通解为： $$x+ye^{\frac{x}{y}}=C.$$

例 3 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$

满足初始条件 $y|_{x=1}=\frac{\pi}{6}$ 的特解。

例4 求微分方程 $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$。

二、小结

齐次方程 $$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x})$$

齐次方程的解法 令$u=\dfrac{y}{x}$

作业： P117 2(3),(4); 3(2)

II　一阶线性微分方程

一、线性方程

二、小结

一、线性方程

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

当$Q(x) \equiv 0$, 方程称为齐次方程.

当$Q(x) \not\equiv 0$, 方程称为非齐次方程.

例如 $\frac{dy}{dx} = y + x^2$, $\frac{dx}{dt} = x\sin t + t^2$, 线性的;

$yy' - 2xy = 3$, $y' - \cos y = 1$, 非线性的.

一阶线性微分方程的解法

线性齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx, \qquad \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln y=-\int P(x)dx+\ln C,$$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

线性非齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$

常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

实质：未知函数的变量代换.

设 $y=u(x)e^{-\int P(x)dx}$ 是方程的解,

$$y'=u'(x)e^{-\int P(x)dx}+u(x)[-P(x)]e^{\int P(x)dx},$$

将y和y'代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$,

积分得 $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$,

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]e^{-\int P(x)dx}$$

$$=\underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例1 求方程 $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ 的通解.

解 $P(x) = -\frac{2}{x+1}$, $Q(x) = (x+1)^3$,

$$y = e^{\int \frac{2}{x+1}dx}\left(\int (x+1)^3 \cdot e^{-\int \frac{2}{x+1}dx}dx + C\right)$$

$$= e^{2\ln(x+1)}\left(\int (x+1)^3 \cdot e^{-\ln(x+1)}dx + C\right)$$

$$= (x+1)^2\left(\int (x+1)dx + C\right)$$

$$= (x+1)^2\left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + C\right).$$

例2　求方程 $(x+y^2)y'=y$ 的通解.

解　方程化成 $\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{1}{y}x=y$

$$P(y)=-\frac{1}{y},Q(y)=y$$

$$x=e^{\int\frac{1}{y}dy}\left(\int ye^{-\int\frac{1}{y}dy}dy+C\right)$$

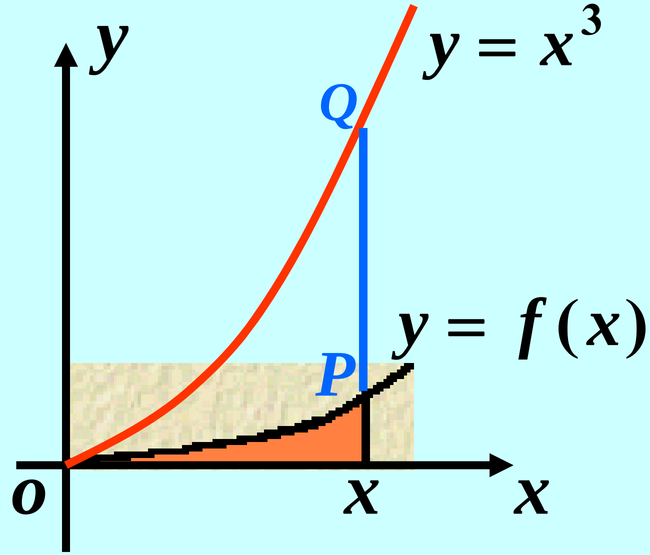
$$=e^{\ln y}\left(\int ye^{-\ln y}dy+C\right)$$

$$=y(y+C)$$

例3 如图所示，平行与 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$与$y=x^3\ (x\geq 0)$截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线$f(x)$.

解 $\int_0^x f(x)dx=\sqrt{(x^3-y)^2}$,

$$\int_0^x ydx=x^3-y,$$



两边求导得 $y'+y=3x^2$,

解此微分方程

$$y' + y = 3x^2$$

$$y = e^{-\int dx}\left[C + \int 3x^2 e^{\int dx} dx\right]$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C = -6$,

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x)$.

例4. 求微分方程 $y^3dx+(2xy^2-1)dy=0$ 的通解。

例5. 求微分方程 $(x-2xy-y^2)\dfrac{dy}{dx}+y^2=0$ 的解。

二、小结

1.一阶线性齐次方程$y' + p(x)y = 0$,

分离变量方法得$y = Ce^{-\int p(x)dx}$.

2.一阶线性非齐次方程$y' + p(x)y = q(x)$,

用常数变易方法得$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$

作业： P123 1(3),(4),(6); 2(1); 5