第一节 微分方程的基本概念

一、问题的提出

二、微分方程的基本概念

三、小结

四、作业

一、问题的提出

例1 一曲线通过点(1,1),且在该曲线上任一点$M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$,求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y = y(x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \text{其中 } x = 1\text{时}, \ y = 1$$

$$y = \int 2x\,dx \quad \text{即 } y = x^2 + C, \quad \text{求得} C = 0,$$

所求曲线方程为 $y = x^2$.

例2 一质量为**m**的物体以初速度v_0自高**H**处自由落下，求物体下落的距离**s**与时间**t**的函数关系（不计空气阻力）。

解 根据牛顿第二定律

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg \qquad t=0\text{时},\ s=0,v=\frac{ds}{dt}=v_0,$$

$$v=\frac{ds}{dt}=gt+C_1 \qquad s=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$$

代入初始条件后知 $C_1 = v_0, C_2 = 0$

故 $$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t,$$

上式中令s=H得到物体落到地面所需的时间

$$t = \frac{1}{g}(\sqrt{v_0^2 + 2gH} - v_0).$$

二、微分方程的基本概念

微分方程:

凡含有未知函数的导数或微分的方程叫微分方程.

例 $y' = xy$, $y^{(5)} = 0$,

$(t^2 + x)dt + xdx = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x + y$,

实质: 联系自变量, 未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.

分类1：常微分方程，偏常微分方程.

微分方程的阶：指微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

分类2：

一阶微分方程 $F(x, y, y') = 0,\quad y' = f(x, y);$

高阶(n≥2)微分方程 $F(x, y, y', \Lambda\ , y^{(n)}) = 0,$

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \Lambda\ , y^{(n-1)}).$$

分类3：线性与非线性微分方程.

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad x(y')^2 - 2yy' + x = 0,$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x);$$

分类4：单个微分方程与微分方程组.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z, \end{cases} \quad xy'' + (x+y)y' = \cos x.$$

本章讨论以下微分方程:

设$y=\varphi(x)$在区间 I 上有 n 阶导数,

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\Lambda\ ,\varphi^{(n)}(x))=0.$$

1）其中x是自变量，$y=\phi(x)$未知函数。

n阶导数必须出现,其余量可以不出现。

2）n阶导数若能解出，既有如下方程：

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$$

3）n阶线性方程：

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=g(x)$$

例3、讨论以下微分方程的类型，并指出阶数：

1） $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}+4x=0;$

2） $x\frac{d^2y}{dx^2}-2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+5xy=0;$

3） $\cos(y'')+\ln y=x+1;$

微分方程的解:

指代入微分方程能使方程成为恒等式的函数.

设$y=\varphi(x)$在区间 I 上有 n 阶导数,

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\Lambda\ ,\varphi^{(n)}(x))=0.$$

则$y=\varphi(x)$为方程的解.

微分方程的解的分类:

(1) 通解: 微分方程的解中含有任意常数, 且独立任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

例 $y' = y$, 通解 $y = ce^x$;

$y'' + y = 0$, 通解 $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$;

(2) 特解: 确定了通解中任意常数以后的解.

解的图象: 微分方程的积分曲线.

通解的图象: 积分曲线族.

初始条件: 用来确定任意常数的条件.

初值问题：求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶: $$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$ 过定点的积分曲线;

二阶: $$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

例 4 验证函数 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是微分方程 $y''-3y'+2y=0$ 的解. 并求满足初始条件 $y\big|_{x=0}=0, y'\big|_{x=0}=1$ 的特解.

解 $y'=C_1e^x+2C_2e^{2x}, y''=C_1e^x+4C_2e^{2x},$

将 y, y', y'' 代入原方程.

$$(C_1e^x+4C_2e^{2x})-3(C_1e^x+2C_2e^{2x})$$
$$+2(C_1e^x+C_2e^{2x})=0$$

故 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是原方程的解.

$$\Theta\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1,\ \ \therefore C_1 = -1, C_2 = 1.$$

所求特解为$y = e^{2x} - e^{x}$.

补充： 微分方程的初等解法：初等积分法.

$\boxed{\text{求解微分方程}} \Longrightarrow \boxed{\text{求积分}}$

(通解可用初等函数或积分表示出来)

例5.求由曲线簇$x^2+Cy^2=1$满足的微分方程，其中C为常数。

解

$x^2+Cy^2=1$,两端对x求导有$2x+2Cyy'=0$.

从$x^2+Cy^2=1$解得$C=\dfrac{1-x^2}{y^2}$,代入上式

$$(1-x^2)y'+xy=0$$

1） 通过消去任意常数的方法求对应的微分方程；

2） 出现几个常数求几阶导数；

3） 解出其中的常数，再代入方程化简整理即可。

例6.求由$y=C_1x+\frac{C_2}{x}$所确定的二阶微分方程。

解

$$y'=C_1-\frac{C_2}{x^2},y''=\frac{2C_2}{x^3}$$

解得：$C_1=y'+\frac{1}{2}xy'',C_2=\frac{1}{2}x^3y''.$

将C_1， C_2代入$y=C_1x+\frac{C_2}{x}$中, 整理得

$$x^2y''+xy'-y=0$$

三、小结

微分方程；微分方程的阶； 微分方程的解;

通解; 初始条件; 特解; 初值问题；分曲积线;

四、作业

P118 1(4); 2(4); 5; 8(选）

第二节 可分离变量的微分方程

一、可分离变量的微分方程

二、典型例题

三、小结

一、可分离变量的微分方程

$g(y)=f(x)dy$ 可分离变量的微分方程.

例如 $\dfrac{dy}{dx}=2x^2y \Rightarrow \dfrac{1}{y}dy=2x^2dx,$

解法　设函数$g(y)$和$f(x)$是连续的,

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx$$

分离变量法

设函数$G(y)$和$F(x)$是依次为$g(y)$和$f(x)$的原函数, $G(y)=F(x)+C$

为微分方程的通解方程特征.

二、典型例题

例1、求微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$的通解。

解　　方程是可分离变量的，分离变量得到$\frac{dy}{y}=2xdx,$

两端积分得到$\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx,$有$\ln|y|=x^2+C,$

$\therefore y=c_1e^{x^2}$为其通解。

例2 求方程 $(1+e^x)yy' = e^x$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解.

解 分离变量 $ydy = \dfrac{e^x}{1+e^x}dx$

两端积分 $\dfrac{1}{2}y^2 = \ln(1+e^x) + C$

将 $y|_{x=0} = 0$ 代入上式得 $C = -\ln 2$

$\therefore y^2 = 2\ln\dfrac{1+e^x}{2}$ 为所求的特解.

例 3 衰变问题:放射性元素铀的衰变速度与未衰变原子含量M成正比,已知$M\big|_{t=0}=M_0$,求衰变过程中铀含量$M(t)$随时间t变化的规律.

解 衰变速度 $\dfrac{dM}{dt}$, 由题设条件

$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M(\lambda>0\text{衰变系数}) \qquad \frac{dM}{M}=-\lambda dt$$

$$\int\frac{dM}{M}=\int-\lambda dt, \quad \ln M=-\lambda t+\ln c, \quad \text{即} M=ce^{-\lambda t},$$

代入$M\big|_{t=0}=M_0$, 得 $M_0=ce^0=C$,

$$\therefore M=M_0e^{-\lambda t}$$

衰变规律

例4 某车间体积为12000立方米, 开始时空气中含有0.1%的CO_2, 为了降低车间内空气中CO_2的含量, 用一台风量为每秒2000立方米的鼓风机通入含0.03%的CO_2的新鲜空气, 同时以同样的风量将混合均匀的空气排出, 问鼓风机开动6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到多少?

解 设鼓风机开动后 t 时刻 CO_2的含量为$x(t)\%$

在$[t, t+dt]$内,

CO_2的通入量$= 2000 \cdot dt \cdot 0.03$,

CO_2的排出量$= 2000 \cdot dt \cdot x(t)$,

CO_2的含量＝CO_2的通入量－CO_2的排出量

$$12000dx = 2000 \cdot dt \cdot 0.03 - 2000 \cdot dt \cdot x(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6}(x - 0.03), \quad \Rightarrow x = 0.03 + Ce^{-\frac{1}{6}t},$$

$$\Theta \; x|_{t=0} = 0.1, \therefore C = 0.07, \Rightarrow x = 0.03 + 0.07e^{-\frac{1}{6}t},$$

$$x|_{t=6} = 0.03 + 0.07e^{-1} \approx 0.056,$$

6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到0.056%.

三、小结

分离变量法步骤:

1.分离变量;

2.两端积分-------隐式通解.

四、作业

P117 1(4); (7); 3(1); 8