第八节 二重积分的计算法

一 问题的提出

二 直角坐标计算二重积分利用

三 利用极坐标计算二重积分

四 小结

一、问题的提出

按定义:二重积分是一个特定乘积和式极限

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i .$$

然而，用定义来计算二重积分，一般情况下是非常麻烦的.

那么，有没有简便的计算方法呢?这就是我们今天所要研究的课题。下面介绍:

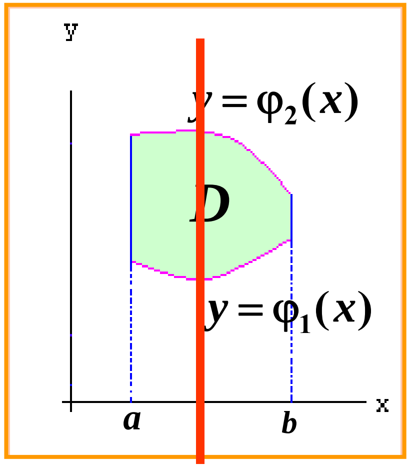
二、利用直角坐标计算二重积分

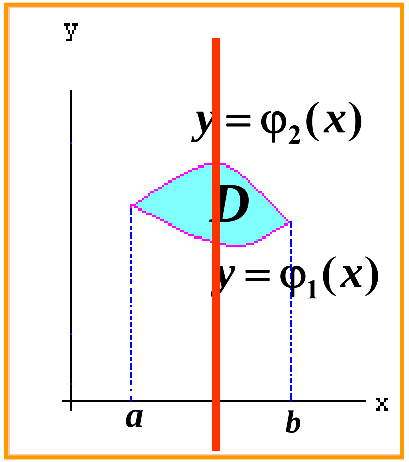
二重积分仅与被积函数及积分域有关,为此, 先介绍:

1、积分域 D:

（1）X-型域

如果积分区域为：$a \le x \le b$，$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

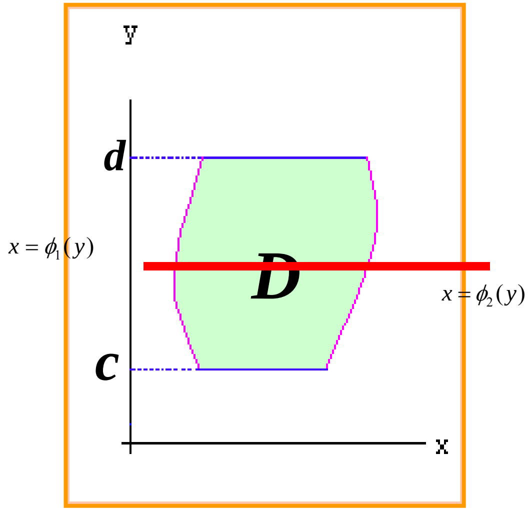


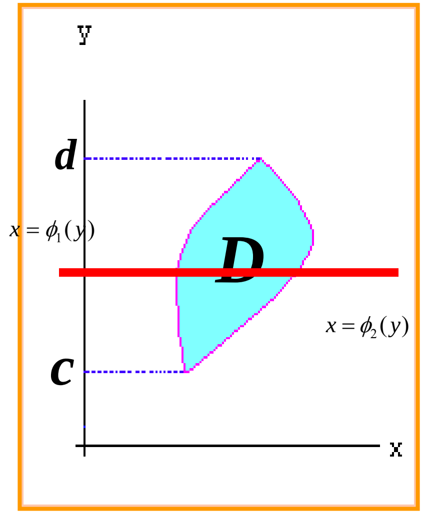


［X—型］

X型区域的特点：a、平行于y轴且穿过区域的直线与区域边界的交点不多于两个；b、$\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$.

（2）**Y-型域：** $c \le y \le d,\quad \phi_1(y) \le x \le \phi_2(y).$





［Y－型］

Y型区域的特点： a、穿过区域且平行于x轴的直线与区域边界的交点不多于两个。b、 $\phi_1(y) \le \phi_2(y).$

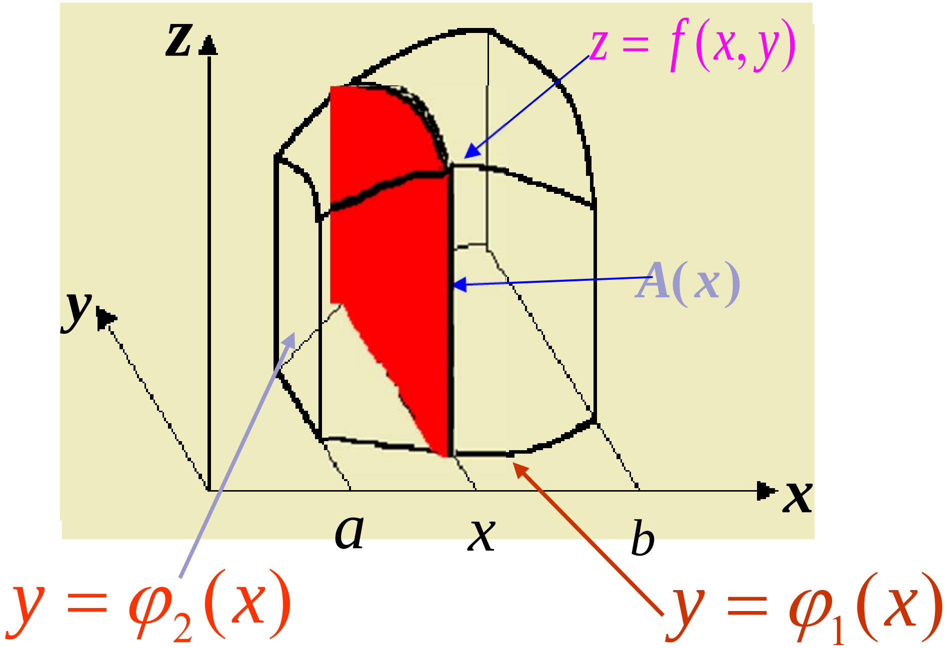
2、X-型域二重积分的计算:

由几何意义，若

$$f(x,y) \geq 0$$

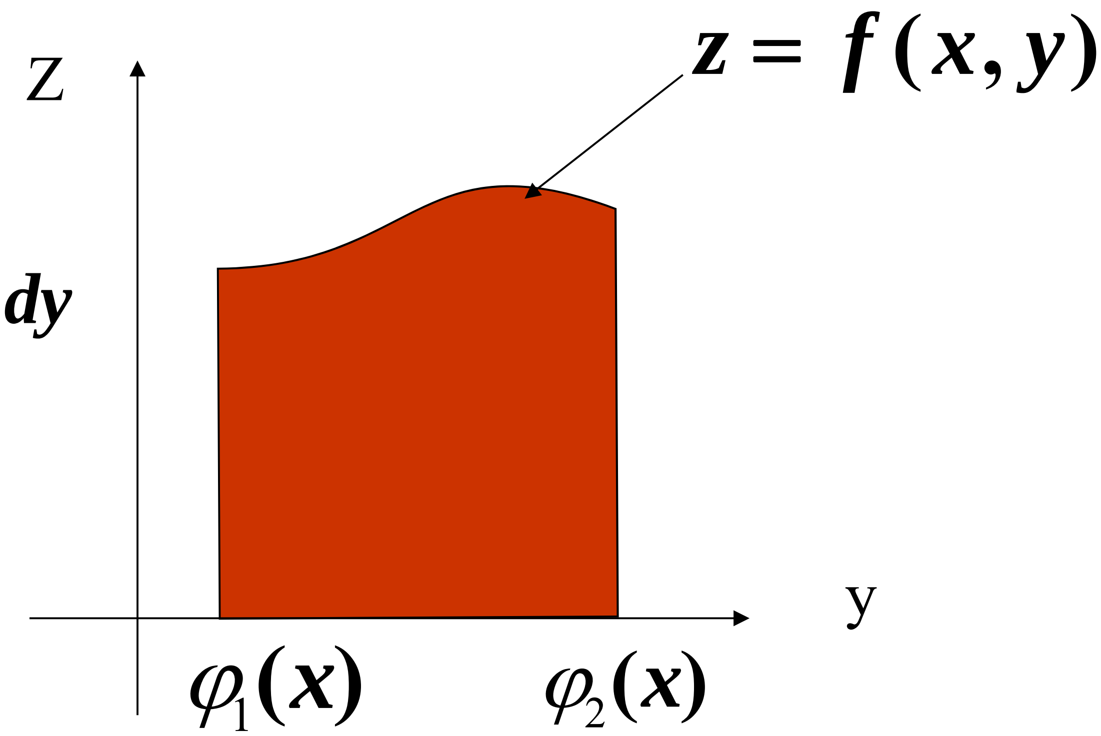
则 $$\iint_D f(x,y)dxdy = V$$

(曲顶柱体的体积)



此为平行截面面积为已知的立体的体积.截面为曲边梯形面积为:

$$A(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$



所以：

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b [\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy]dx$$

注意： 1）上式说明：二重积分可化为二次定积分计算；

2）积分次序：X-型域 先Y后X；

3）积分限确定法：

域中一线插，内限定上下，
域边两线夹，外限依靠它。

为方便，上式也常记为：

$$\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

- 注：若 $f(x,y)\le 0$ 仍然适用。

3、Y-型域下二重积分的计算：

同理：［Y－型域下］

亦为平行截面面积为已知的立体体积.

用y＝常数截立体，其截面也为曲边梯形，

面积为： $B(y)=\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx$

于是

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d\left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

注意: 1）积分次序: **Y-型域 ,先x后Y;**

2）积分限确定法:

“域中一线插”， 须用平行于X轴的射线穿插区域 。

也可记为 : $\iint\limits_D = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx$

4、利用直角坐标系计算二重积分的步骤

（1）画出积分区域的图形,求出边界曲线交点坐标；

（2）根据积分域类型, 确定积分次序；

（3）确定积分限，化为二次定积分；

（4）计算两次定积分，即可得出结果.

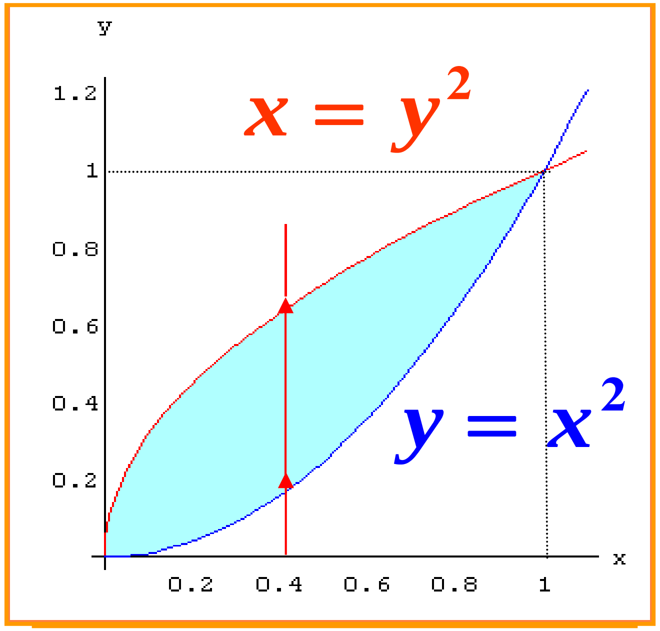
注意：二重积分转化为二次定积分时，关键在于正确确定积分限,一定要做到熟练、准确。

例 1　求 $\iint\limits_D (x^2+y)dxdy$，其中 D 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围平面闭区域.

解：

两曲线的交点

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0)\ ,(1,1),$$

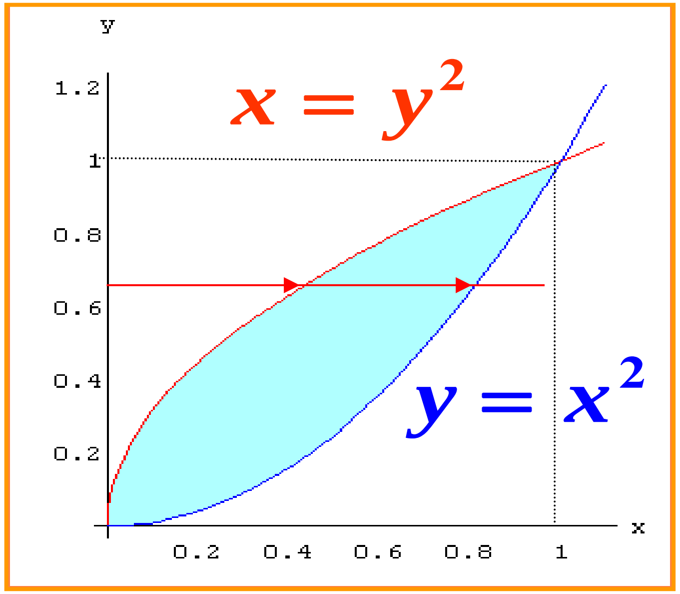


［X—型］ $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$

$$\iint_D (x^2+y)dxdy = \int_0^1 [\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)dy]dx$$

$$= \int_0^1 [x^2(\sqrt{x}-x^2)+\frac{1}{2}(x-x^4)]dx$$

$$= \frac{33}{140}.$$



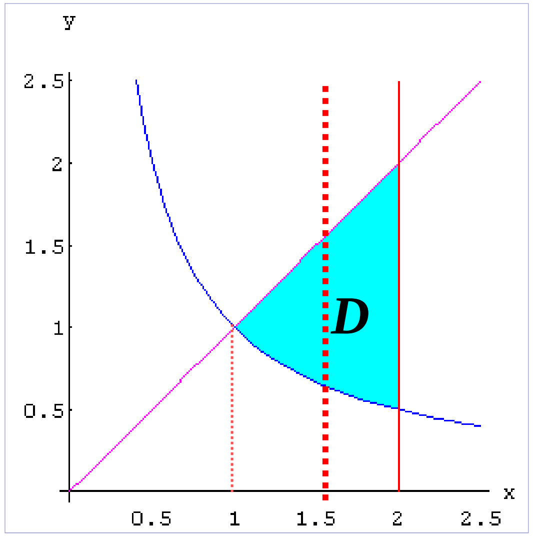
［Y—型］ $\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$

$$\iint_D (x^2+y)dxdy = \int_0^1 [\int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2+y)dx]dy$$

$$= \frac{33}{140}.$$

例2　计算 $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$. 其中 D 由 $y=x,\ y=\frac{1}{x},\ x=2$ 围成.

解: X-型　$D: \frac{1}{x}\le y\le x, 1\le x\le 2.$



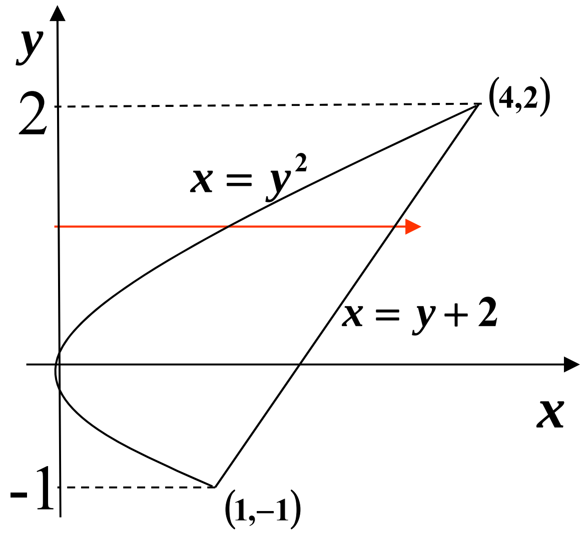
左边交点坐标为（ 1,1）

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$$

$$=\int_1^2\left[-\frac{x^2}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx \quad =\int_1^2 (x^3-x)dx \quad =\frac{9}{4}.$$

例3　计算 $\iint\limits_D xy\,d\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2 = x$ 及 $y = x - 2$ 所围成的闭区域。

解：（如图）将D作Y型　(先x后y)



$$\iint\limits_D xy\,d\sigma = \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2}^{y+2} xy\,dx$$

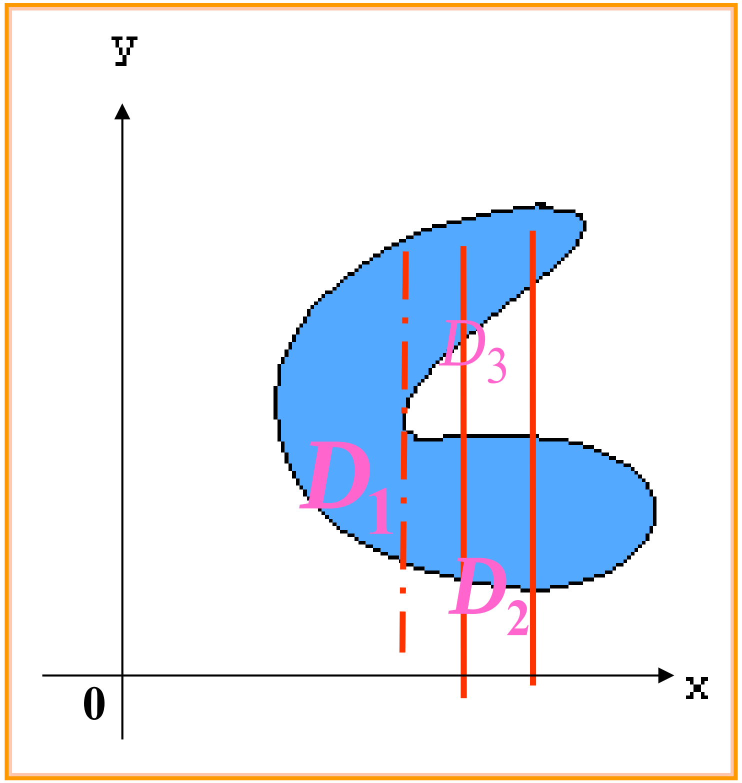
$$= \int_{-1}^{2} \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{y^2}^{y+2} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} [y(y+2)^2 - y^5]dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{4}{3} y^3 + 2y^2 - \frac{y^6}{6} \right]_{-1}^{2} = 5\frac{5}{8}$$

5、若区域为组合域，如图则：

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}.$$



6、如果积分区域既是X－型，又是[Y－型], 则有

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b [\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} fdy]dx = \int_c^d [\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} fdx]dy$$

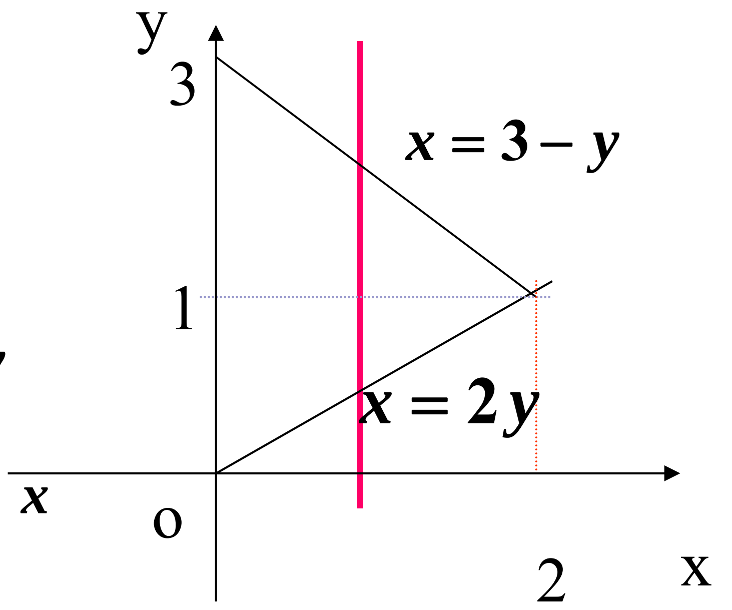
例 4 改变积分 $\int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_0^{3-y} f(x,y)dx$ 的积分次序.

解：积分区域如图

$$0 \le y \le 1, 0 \le x \le 2y$$

$$1 \le y \le 3, 0 \le x \le 3-y$$

$$\Rightarrow 0 \le x \le 2, \frac{1}{2}x \le y \le 3-x$$



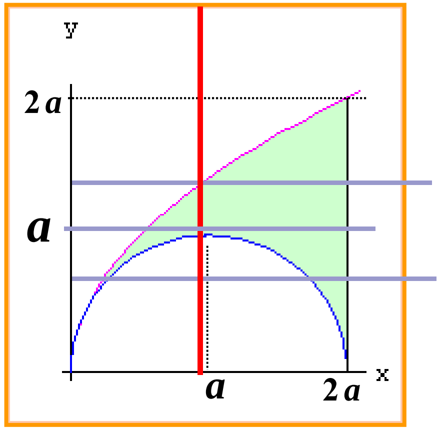
原式 $= \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x,y)dy$.

例 5　改变积分 $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy \quad (a>0)$ 的次序.

解： $y=\sqrt{2ax}$

$$y=\sqrt{2ax-x^2}$$

$$\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$$

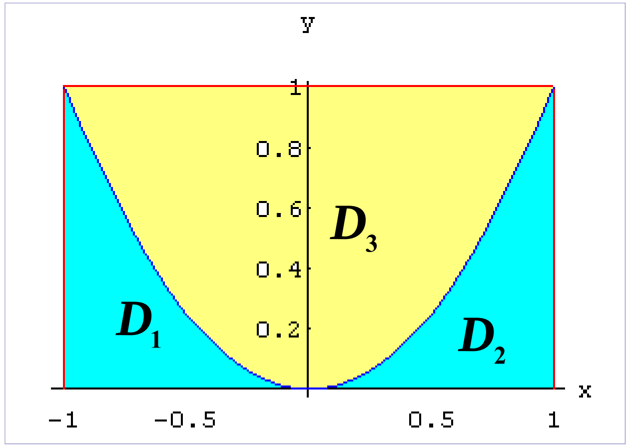


$$\text{原式}=\int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)dx$$

$$+\int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y)dx.$$

例6 计算 $\iint\limits_D |y-x^2| d\sigma$. 其中 $D: -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1.$

解: 先去掉绝对值符号，如图



$$\iint\limits_D |y-x^2| d\sigma$$

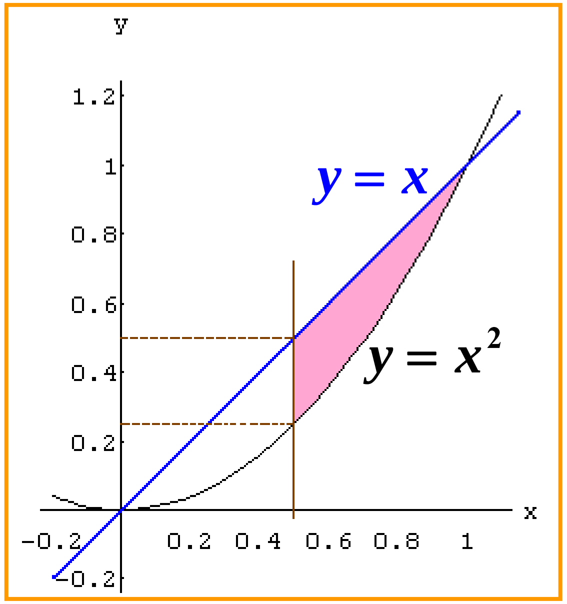
$$= \iint\limits_{D_1+D_2} (x^2-y) d\sigma + \iint\limits_{D_3} (y-x^2) d\sigma$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{x^2} (x^2-y) dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (y-x^2) dy = \frac{11}{15}.$$

例 7　计算积分 $I=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}dy\int_{y}^{\sqrt{y}}e^{\frac{y}{x}}dx.$

解　$\because \int e^{\frac{y}{x}}dx$ 不能用初等函数表示

$\therefore$ 先改变积分次序.



原式 $=I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{x^2}^{x}e^{\frac{y}{x}}dy$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(e-e^{x})dx=\frac{3}{8}e-\frac{1}{2}\sqrt{e}.$$

利用对称性、奇偶性计算二重积分

- 1、 积分区域关于y轴对称，则

（1） 若 $f(-x,y)=-f(x,y),(x,y)\in D$ 时，有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=0$$

（2）若 $f(-x,y)=f(x,y),(x,y)\in D$ 时，有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy,$$

$$D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D,x\geq 0\}$$

利用对称性、奇偶性计算二重积分

- 2、 积分区域关于x轴对称，则

（1） 若 $f(x,-y)=-f(x,y),(x,y)\in D$ 时，有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=0$$

（2）若 $f(x,-y)=f(x,y),(x,y)\in D$ 时，有

$$\iint_D f(x,y)dxdy=2\iint_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

$$D_2=\{(x,y)\,|\,(x,y)\in D,\mathrm{y}\geq 0\}$$

利用对称性、奇偶性计算二重积分

例8、计算 $\iint\limits_D y[1+xf(x^2+y^2)]dxdy$，其中 D 由曲线 $y=x^2$ 与 $y=1$ 所围成。

7. 小结

二重积分在直角坐标下的计算公式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \quad [\text{X—型}]$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx. [\text{Y—型}]$$

（在积分中要正确选择 积分次序）

作业

- P306　1(1),(2)；　2(3，4)；　3(4，5)；　4；　5；　8

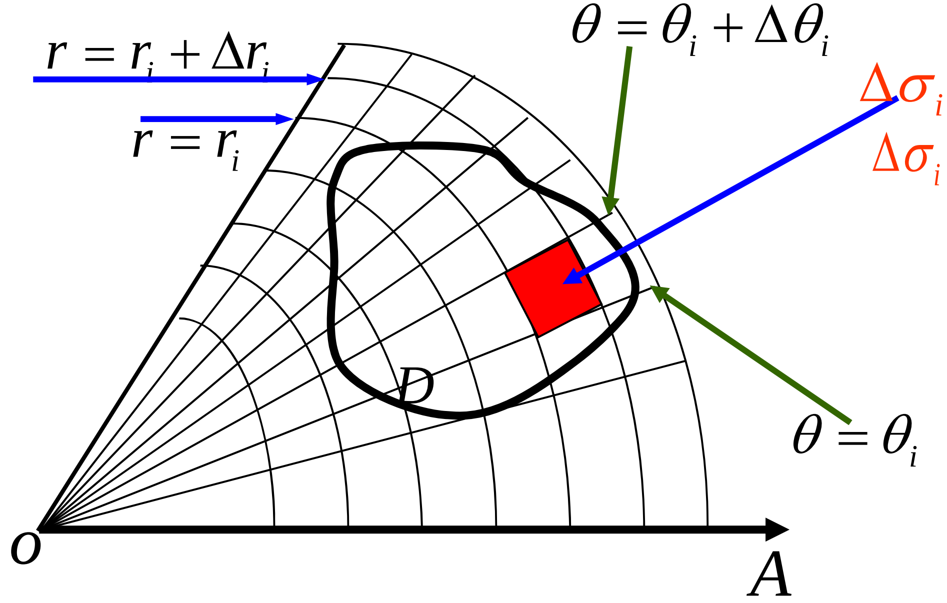
三　利用极坐标系计算二重积分

当一些二重积分的积分区域**D**用极坐标表示比较简单，或者一些函数它们的二重积分在直角坐标系下根本无法计算时，我们可以在极坐标系下考虑其计算问题。

例 $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} e^{-x^2-y^2}dxdy,\quad \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sin(x^2+y^2)dxdy,\quad \iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\cos(x^2+y^2)dxdy$等

1 直系与极系下的二重积分关系（如图）

（1）面积元素变换为极系下：



$$\Delta\sigma_i=\frac{1}{2}(r_i+\Delta r_i)^2\cdot\Delta\theta_i-\frac{1}{2}r_i^{\ 2}\cdot\Delta\theta_i$$

$$=\frac{1}{2}(2r_i+\Delta r_i)\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i$$

$$=\frac{r_i+(r_i+\Delta r_i)}{2}\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i$$

$$=\bar{r}_i\cdot\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i,$$

（2）二重积分转换公式：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_i f(r_i\cos\theta_i,r_i\sin\theta_i)r_i\cdot\Delta r_i\cdot\Delta\theta_i=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta.$$

（3）注意：将直角坐标系的二重积分化为极坐标系下的二重积分需要进行“三换”：

$$\begin{cases} \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \\ D_{xy} \to D_{r\theta} \\ dxdy \to rdrd\theta \end{cases}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

2　极系下的二重积分化为二次积分

将直系下的二重积分化为极系后，极系下的二重积分仍然需要化为二次积分来计算。

关键是定出 r,θ的上下限

定 θ的上下限：

用两条过极点的射线夹平面区域，由两射线的倾角得到其上下限

定r的上下限：

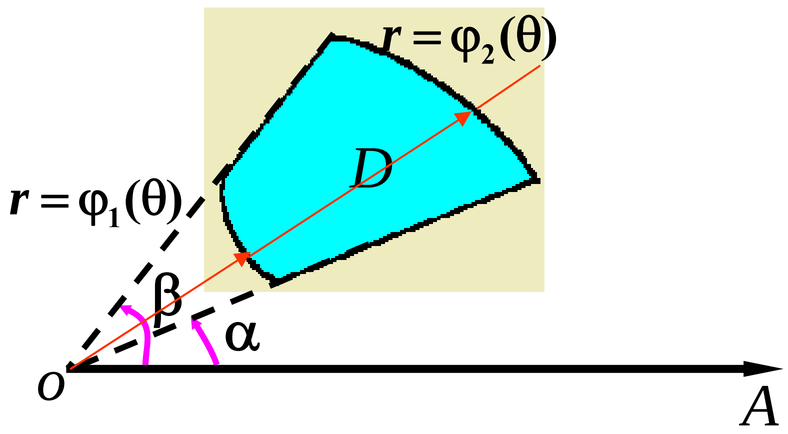
任意作过极点的半射线与平面区域相交，由穿进点，穿出点的极径得到其上下限。

具体地（如图）

（1）区域如图1

$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

$$\varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta).$$



$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

图1

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

（2）区域如图2

$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

$$\varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta).$$

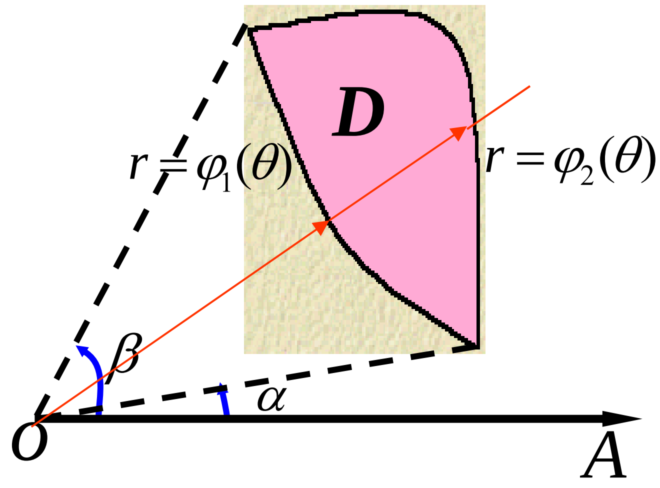


图2

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

（3）区域如图3

$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

$$0 \le r \le \varphi(\theta).$$

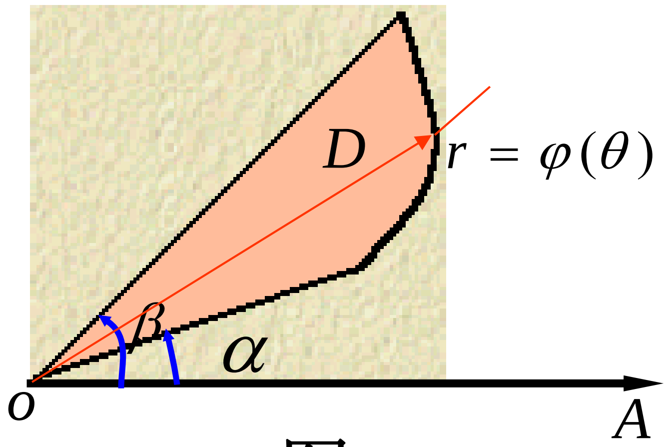


图3

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

（4）区域如图4

$$0 \le \theta \le 2\pi, \qquad 0 \le r \le \varphi(\theta).$$

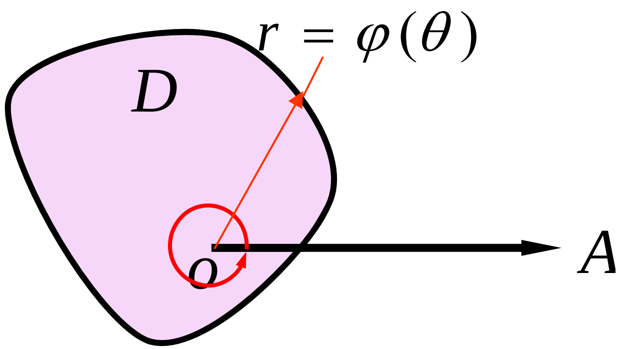


图4

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr.$$

例 1　计算$\iint\limits_D \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$，其中 D 是由中心在原点，半径为 1 的圆周所围成的闭区域.

解　在极坐标系下

D：$0 \le r \le 1$，$0 \le \theta \le 2\pi$.

$$\iint\limits_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln 2 d\theta \quad = \pi \ln 2.$$

例 2　计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$，其中 D 是由中心在原点，半径为 R 的圆周所围成的闭区域.

解　在极坐标系下

D: $0\le r\le R$，$0\le\theta\le 2\pi$.

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-e^{-R^2})d\theta=\pi(1-e^{-R^2}).$$

例3 求积分$\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$.其中**D**是由曲线$x^2+y^2=2x$所围成的平面区域。

解

$$D=\left\{(\mathrm{r},\theta)\,|\,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2\cos\theta\right\},$$

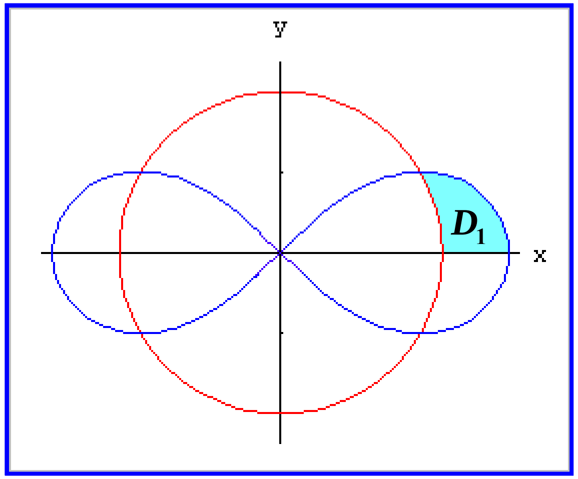
$$\therefore\quad \iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}rdr$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}2\sin^2\theta d\theta=\pi$$

例 4　求双纽线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 和 $x^2+y^2\geq a^2$ 所围成的图形的面积.

解 根据对称性有 $D=4D_1$



在极坐标系下

$$x^2+y^2=a^2\Rightarrow r=a,$$

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)\Rightarrow\quad r=a\sqrt{2\cos 2\theta},$$

由$\begin{cases} r = a\sqrt{2\cos 2\theta} \\ r = a \end{cases}$，得交点$A = (a, \frac{\pi}{6})$，

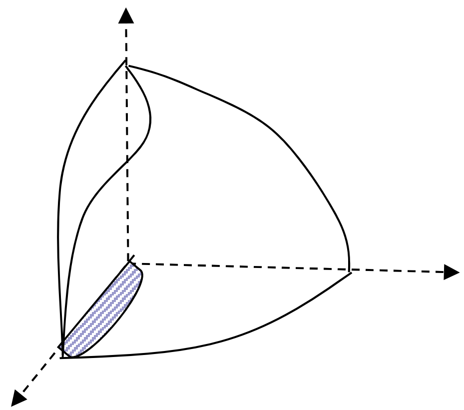
所求面积$\sigma = \iint\limits_{D} dxdy = 4\iint\limits_{D_1} dxdy$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} rdr$$

$$= a^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}).$$

例 5 求球体 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的立体的体积.

解 由对称性，所求体积 V为第一卦限部分立体体积的 4倍，（如图）



$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$D: x^2+y^2\le 2ax \quad (x,y\ge 0)$$

在极系下：

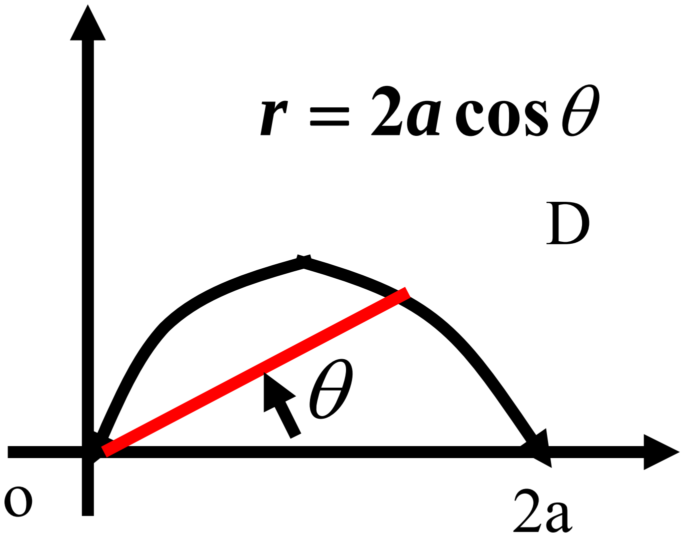
$$\mathrm{D}:\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le r\le 2a\cos\theta,.$$

$$\text{从而} V = 4\iint_D \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

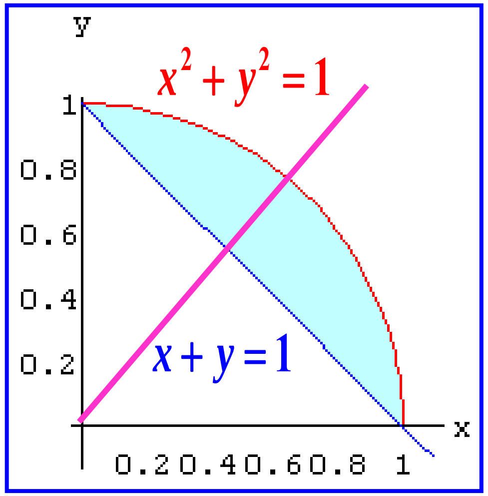
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2 - r^2}\, r dr$$

$$= \frac{32}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta) d\theta$$

$$= \frac{32}{3}a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$



例 6 写出积分 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$ 的极坐标二次积分形式



解 如图：在极坐标系下

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

圆方程为 $r = 1$,

直线方程为$r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

四、小结

计算二重积分应该注意以下几点：

首先，选择坐标系。先要考虑积分区域的形状，看其边界曲线用直系方程表示简单还是极系方程表示简单，其次要看被积函数的特点，看使用极坐标后函数表达式能否简化并易于积分。

其次，化二重积分为二次积分。根据区域形状和类型确定积分次序，从而穿线确定内限，夹线确定外限。

最后，计算二次积分。由内向外逐层计算，内层积分计算时，外层积分变量看做常量。

作业

- P311 1(3)；2（3）；3（3）；4（2）；5（选）