第七节 二重积分的概念及性质

一 问题的提出

二 二重积分的定义

三 二重积分的性质

四 小结

一元函数定积分是求与定义在某一区间上的函数有关的某种总量的数学模型，作为推广，二元函数的二重积分是求与定义在某一平面区域上的函数有关的某种总量的数学模型，三元函数的三重积分是求与定义在某一空间区域上的函数有关的某种总量的数学模型，这些模型的数学结构相同，都是和式的极限。

一、问题的提出

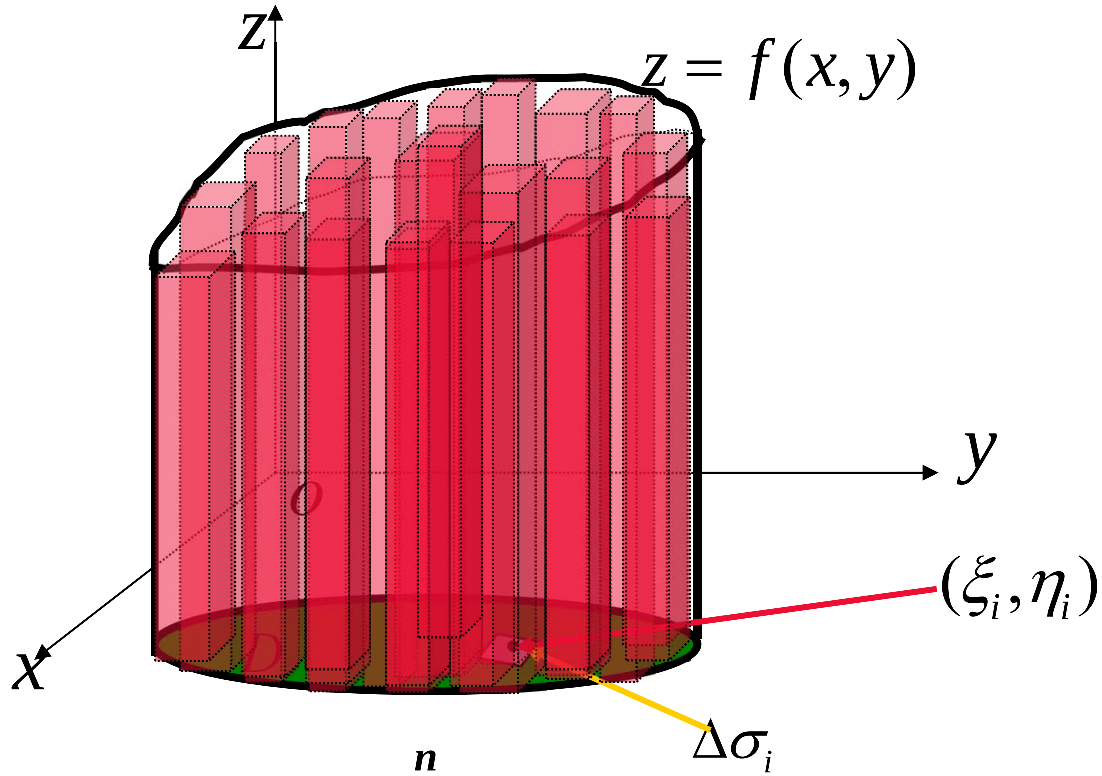
1　曲顶柱体的体积

一曲顶柱体其顶为曲面 $z = f(x, y)$ 底面为平面区域　D,求此曲顶柱体的体积。

解：对区域D进行网状分割（如图）

1)　区域D可分割成n个小区域：

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \Lambda\ \sigma_i, \Lambda\ , \sigma_n$$



曲顶柱体的体积 $V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$

2）近似：每个个小区域 $\Delta\sigma_i$ 内任取一点 (ξ_i,η_i)，则每个小曲顶柱体的体积近似为：

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i,\eta_i).\Delta\sigma_i$$

3）求和：所有小区域对应小曲顶柱体体积之和为

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

4）取极限：

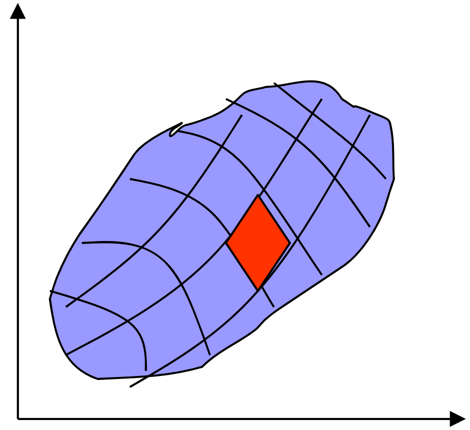
$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\cdot\Delta\sigma_i$$

其中 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\left\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\right\}$

2　平面薄片的质量

设平面薄片占有xoy面上的区域为D，它在点（ x ， y ）处的密度为$r(x, y)$

求：此薄片的质量



1)　区域D可分割成n个小区域：

$$\sigma_1,\ \sigma_2, \Lambda\ \sigma_i, \Lambda\ , \sigma_n$$

2）取点　$(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$

3）作和　$\sum_{i=1}^{n} r(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i$

4）取极限　$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} r(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta\sigma_i$

二、二重积分的定义

定义　设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，Λ，$\Delta\sigma_n$，其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，

作乘积　$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，　　　　$(i=1,2,\Lambda\ ,n)$，

并作和　$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分，

记为 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，

$$\text{即} \iint\limits_{\boxed{D}} \boxed{\boxed{f(\boxed{x,y})}d\sigma} = \lim_{\lambda\to 0}\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}.$$

积分区域　被积函数　积分变量　被积表达式　面积元素　积分和

注： 1 在二重积分定义中，对区域D的划分是任意的，故 如果在直角坐标系中用平

行于坐标轴的直线网来划分 D，则除了包含，边界的一些小闭区域外，其余的小闭区域

都是矩形闭区域。设矩形小闭区域 $\Delta\sigma_i$

的边长为 Δx_j 和 Δy_k，

则 $$\Delta\sigma_i = \Delta x_j \Delta y_k$$

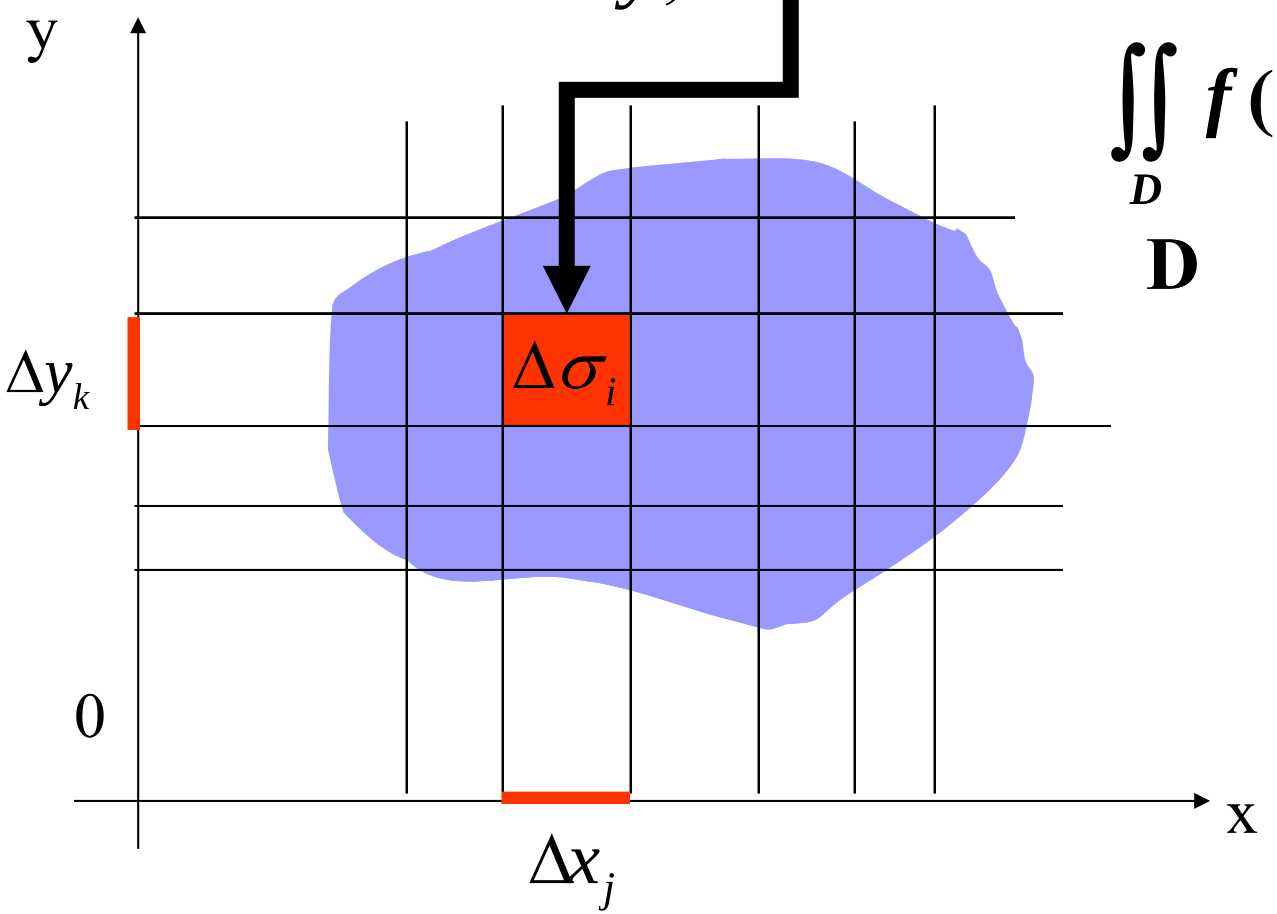
故在直角坐标系中，

直角坐标系下面积元素 $d\sigma$ 图示

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

$$d\sigma = dxdy,$$



2 存在性：当$f(x,y)$在闭区域D上连续时，函数$f(x,y)$在D上的二重积分必定存在。以后总假定$f(x,y)$在D上的二重积分是存在的。

3 由二重积分的定义可知：曲顶柱体的体积是函数$f(x,y)$在D上的二重积分 $V=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,

平面薄片的质量是面密度$\rho(x,y)$在薄片所占闭区域D上的二重积分：$M=\iint\limits_D \rho(x,y)d\sigma.$

4　二重积分的几何意义：

1）如果 $f(x,y)\geq 0$，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 解释为曲顶柱体的体积。

2）如果 $f(x,y)\leq 0$，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 解释为曲顶柱体体积的负值。

3）如果 $f(x,y)$ 既有正又有负，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$ 解释为曲顶柱体体积的代数和。

（其中xoy面上方柱体的体积取正，
xoy面下方柱体的体积取负）。

三、二重积分的性质

性质1 被积函数的常数因子可以提到二重积分号的外面，即：

$$\iint_D kf(x,y)d\sigma = k\iint_D f(x,y)d\sigma$$

性质2 函数的和（或差）的二重积分等于各个函数的二重积分的和（或差）。

$$\iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma = \iint_D f(x,y)d\sigma \pm \iint_D g(x,y)d\sigma$$

性质3 (区域可加性) 如果闭区域D被有限条曲线分为有限个部分闭区域，则在D上的二重积分等于在个部分闭区域上的二重积分的和.

例如 $\mathbf{D}=D_1+D_2$,则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

性质4 如果在D上 $f(x,y)=1$

$$\iint_D 1d\sigma=\iint_D d\sigma=\sigma$$ σ为D之面积

（高为1的平顶柱体的体积在数值上等于柱体的底面积。）

性质5　若在D上, $f(x,y) \le g(x,y)$, 则:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma,$$

特别地,

$$\Theta -|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)|$$

$$\therefore \left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma$$

例1 比较下列积分的大小：

1） $\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$

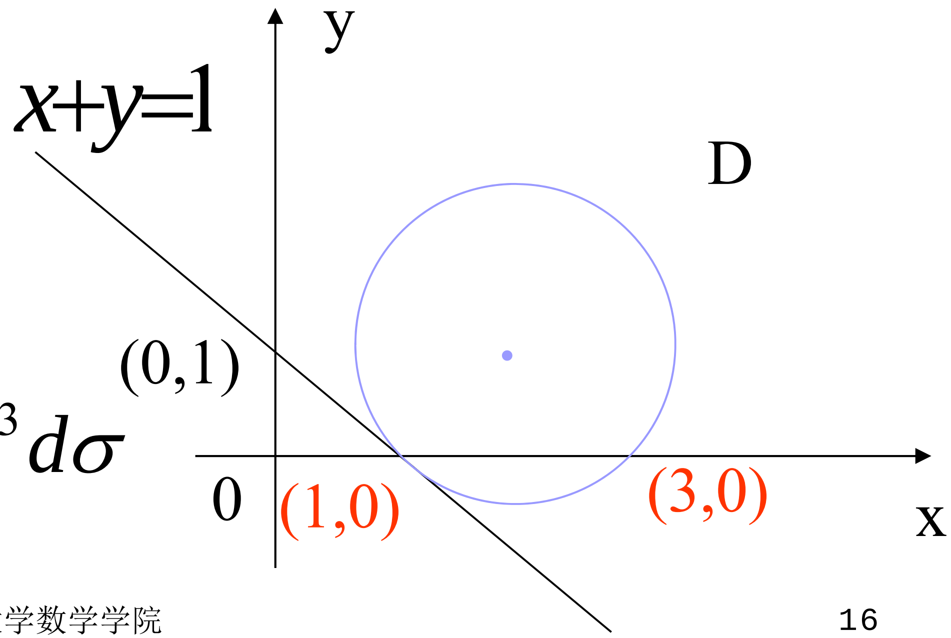
其中D: $(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$

解：在区域 D内，显然有

$x+y \ge 1$，故在D内

$(x+y)^2 \le (x+y)^3$

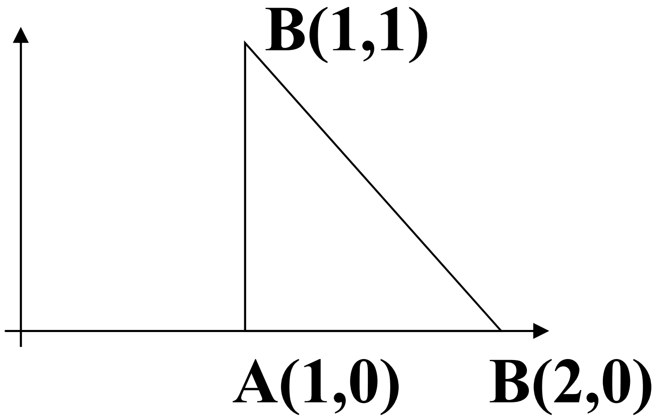
$\therefore \iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma \le \iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$



2） $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$,其中区域 D为

顶点为A(1，0)B(1，1)，C(2，0)的三角形闭区域。

解：BC的方程　x+y=2



D内 $1 \le x+y \le 2,\quad 0 \le \ln(x+y) < 1$

所以 $\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma \ge \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$

性质6（估值定理） 设在D上f(x,y)的最大值为M，最小值为m，A为D的面积，即

$m \le f(x) \le M$ 则 $mA \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MA$

证明： 因为 $m \le f(x) \le M$

由性质5

$$\iint_D m d\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D M d\sigma$$

所以 $mA \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MA$

例2 $I=\iint\limits_D (x+y+1)d\sigma,$

其中D是矩形闭区域:$0\le x\le 1,0\le y\le 2$

解: $f(x,y)=x+y$

在D内的最大值为4，最小值为1

区域D的面积为2

所以由性质6得

$$2\le\iint\limits_D (x+y+1)d\sigma\le 8$$

性质7(中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域D连续，σ为之面积,则在D上至少存在一点 (ξ,η) 使得：

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta).\sigma$$

证明：由性质6得，

$$m \le \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)d\sigma \le M$$

根据据闭区域上连续函数的介值定理，在**D**上至少存在一点 (ξ, η),

使得
$$f(\xi,\eta)=\frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)d\sigma$$

即
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

四、小结

二重积分的定义（和式的极限）

二重积分的几何意义（曲顶柱体的体积）

二重积分的性质

作业

- P298　2；3(2); 4;