# 第四节　全微分

一　全微分的定义

二　可微的条件

三　全微分的应用

# 一、全微分的定义

如果函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的全增量

$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为

$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中$A,B$不依赖于

$\Delta x,\Delta y$ 而仅与$x,y$有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，

则称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，

$A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的

全微分，记为$dz$，即$dz=A\Delta x+B\Delta y$.

函数若在某区域 $D$ 内各点处处可微分，

则称这函数在$D$ 内可微分.

# 全增量的概念

如果函数$z = f(x,y)$在点$(x,y)$的某邻域内有定义，并设$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$为这邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

为函数在点$P$对应于自变量增量$\Delta x, \Delta y$的全增量，记为$\Delta z$

即 $$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

# 二、可微的条件

定理1

如果函数$z = f(x, y)$在点$(x, y)$可微分, 则函数在该点连续.

事实上　$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \lim_{\rho \to 0}[f(x, y) + \Delta z]$$

$$= f(x, y)$$

故函数$z = f(x, y)$在点$(x, y)$处连续.

**定理 2（必要条件）** 如果函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，则该函数在点$(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$必存在，且函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的全微分为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证　如果函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$可微分,

$P(x+\Delta x, y+\Delta y)$属于$P$的某个邻域

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad 总成立,$$

当$\Delta y = 0$时，上式仍成立,此时$\rho = |\Delta x|$,

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A\cdot\Delta x + o(|\Delta x|),$$

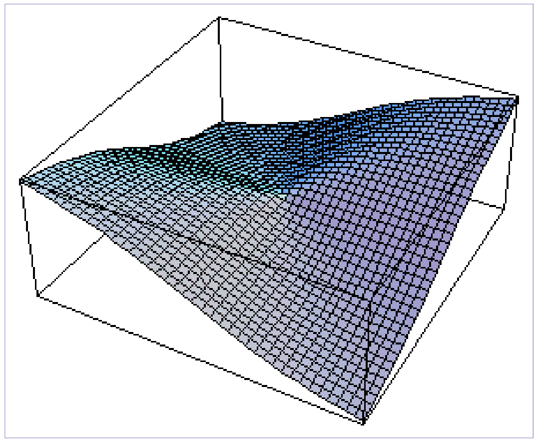
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = A = \frac{\partial z}{\partial x},$$

同理可得　$B = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

一元函数在某点的导数存在 $\Longleftrightarrow$ 微分存在.

多元函数的各偏导数存在 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 全微分存在.

例如，$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}.$



在点(0,0)处有

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$$

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

如果考虑点$P(\Delta x,\Delta y)$沿着直线$y=x$趋近于$(0,0)$，

则 $$\frac{\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2},$$

说明它不能随着 $\rho$趋于 $0$，而趋于$0$ 当 $\rho\to 0$时，

$$\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]\neq o(\rho),$$

函数在点$(0,0)$处不可微.

说明：多元函数的各偏导数存在并不能保证全微分存在，

定理3 （充分条件）如果函数 $z = f(x, y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x, y)$连续，则该函数在点$(x, y)$可微分.

证 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - \underline{f(x, y+\Delta y)}]$$

$$+ [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)],$$

在第一个方括号内，应用拉格朗日中值定理

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x \quad (0<\theta_1<1)$$

$$= f_x(x, y)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x$$ （依偏导数的连续性）

其中$\varepsilon_1$为$\Delta x$，$\Delta y$的函数,

且当$\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$时，$\varepsilon_1 \to 0$.

$$同理\ \ f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$= f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y,\quad 当\Delta y \to 0时，\varepsilon_2 \to 0,$$

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_2 \Delta y$$

$$\Theta \quad \left| \frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\rho} \right| \le |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \quad \xrightarrow{\rho \to 0} 0,$$

$$故函数 z = f(x, y) 在点 (x, y) 处可微.$$

习惯上，记全微分为 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$

通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合叠加原理.

全微分的定义可推广到三元及三元以上函数

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

叠加原理也适用于二元以上函数的情况.

例 1　计算函数$z=e^{xy}$在点$(2,1)$处的全微分.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^2,$$

所求全微分 $dz=e^2dx+2e^2dy.$

例 2 求函数$z = y\cos(x-2y)$，当$x=\dfrac{\pi}{4}$，$y=\pi$，$dx=\dfrac{\pi}{4}$，$dy=\pi$时的全微分..

解 $$\frac{\partial z}{\partial x} = -y\sin(x-2y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x-2y) + 2y\sin(x-2y),$$

$$dz\Big|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} dx + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(\frac{\pi}{4},\pi)} dy = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi(4-7\pi).$$

例 3　计算函数$u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$的全微分.

解　$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$,　$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$,

所求全微分

$$du = dx + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}\right)dy + ye^{yz}dz.$$

例 4　试证函数

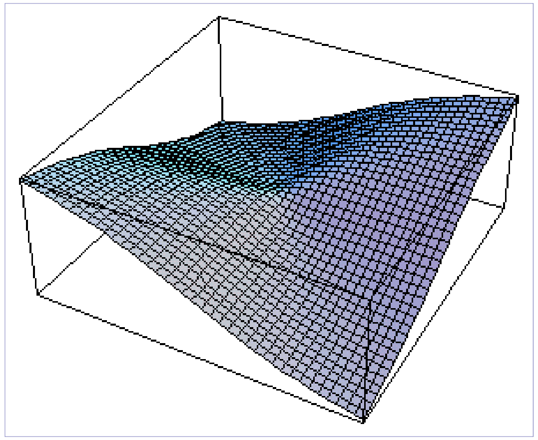
$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在点$(0,0)$连续且偏导数存在，但偏导数在点$(0,0)$不连续，而$f$在点$(0,0)$可微.

思路：按有关定义讨论；对于偏导数需分

$(x,y)\neq(0,0)$，$(x,y)=(0,0)$讨论.

证　令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$



则 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\frac{1}{\rho}=0=f(0,0),$$

故函数在点$(0,0)$连续，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

同理　$f_y(0,0)=0.$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当点$P(x,y)$沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时,

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\right),$$

不存在.

所以$f_x(x,y)$在$(0,0)$不连续

同理可证$f_y(x,y)$在$(0,0)$不连续.

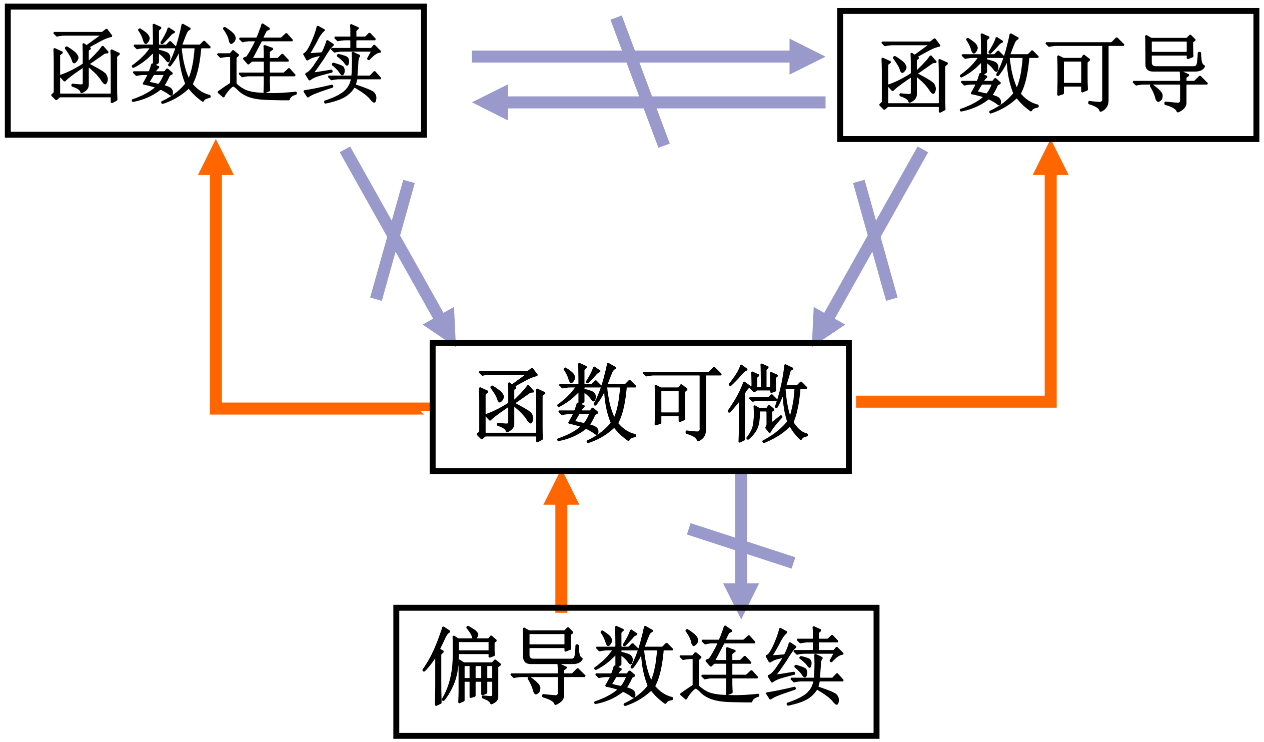
$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)$$

$$= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

故$f(x,y)$在点$(0,0)$可微　　$df\big|_{(0,0)} = 0.$

# 多元函数连续、可导、可微的关系



# 三 函数全微分应用- 线性化与近似计算

- 线性化

如果函数$z = f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$可微分，则函数图像的曲面在该点附近的小曲面可被一小块切平面近似代替， 其方程为：

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

称其为函数在点$(x_0,y_0)$的线性化，或标准线性近似。

# 应用的例子

例5. 计算函数 $f(x,y)=x-xy+\frac{1}{2}y^2+6$ 在点 $(3,2)$ 的线性化。

**例6.** 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值。

# 作　　业

- P275 1（3）；2；4；5（2）；7