§6.2 多元函数的概念

一、多元函数的概念

二、二元函数的定义域

三、二元函数的几何意义

四、二元函数的极限与连续

一、多元函数的概念

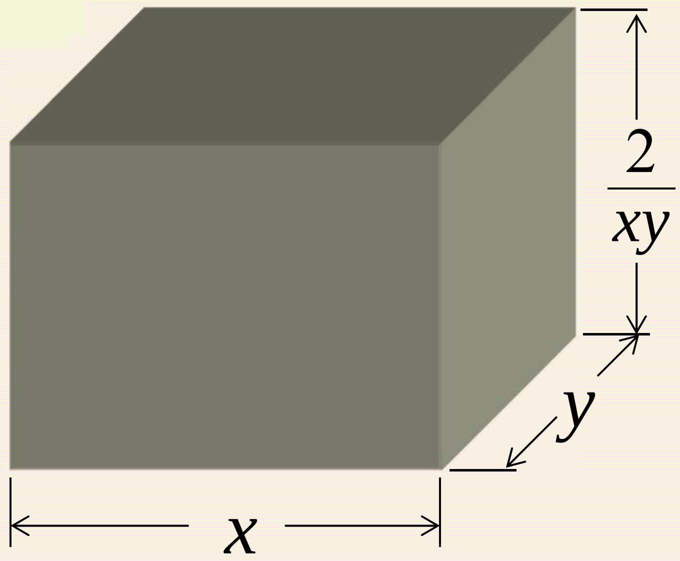
一个实际问题：

用铁板做成一个体积为2立方米的有盖长方体水箱，问长、宽、高各取多少时，才能使用料最省。

设水箱的长为 x、宽为 y，则高为 $\frac{2}{xy}$，表面积为

$$S = 2(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y})\ (x>0,\ y>0)。$$

注意：若高为h，则 $xyh=2$



一、多元函数的概念

一个实际问题：

用铁板做成一个体积为2立方米的有盖长方体水箱，问长、宽、高各取多少时，才能使用料最省。

设水箱的长为 x、宽为 y，则高为 $\frac{2}{xy}$，表面积为

$$S = 2(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y})\ (x>0,\ y>0)。$$

上述问题的等价提法是：当 x和 y取何值时，S 的值最小。

一、多元函数的概念

一个实际问题：

用铁板做成一个体积为2立方米的有盖长方体水箱，问长、宽、高各取多少时，才能使用料最省。

设水箱的长为 x、宽为 y，则高为 $\frac{2}{xy}$，表面积为

$$S = 2(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y})\ (x>0，\ y>0)。$$

根据上述关系，对任意 $x>0, y>0$，变量S总有确定的值和(x, y)对应，我们称变量S是变量x、y 的二元函数。

二元函数的定义：

定义6.2 设D是xOy平面上的一个点集。如果对于每个点 $P(x, y)\in D$，变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应，则称 z 是变量x、y 的二元函数，记为

$$z=f(x, y),$$

其中D 称为定义域， x、y 称为自变量，z 称为因变量。

对于$(x_0, y_0)\in D$，所对应的 z 的值记为 $z_0=f(x_0, y_0)$，称为当$(x, y)=(x_0, y_0)$时，函数$z=f(x, y)$的函数值。

集合$\{z \mid z=f(x, y), (x, y)\in D\}$称为函数的值域。

提问： 如何给出n $(n\geq 3)$元函数的定义？

例1 设$z=x^2+y^2$。

$z=x^2+y^2$是以x、y为自变量，z为因变量的二元函数。

函数的定义域为$D(f)=\{(x, y)|x, y\in(-\infty,+\infty)\}$。

函数的值域为$Z(f)=[0, +\infty)$。

例2 设有一个长方体，高为h，底是边长为b的正方形，则其体积为$V=b^2h(b>0, h>0)$。

$V=b^2h$是二元函数，自变量为h、b，因变量为V。

函数的定义域为$D(f)=\{(b, h)|\ b>0，h>0\}$；

函数的值域为$Z(f)=(0, +\infty)$。

例3 设Z表示居民人均消费收入，Y表示国民收入总额，P表示总人口数，则有 $Z=S_1S_2\dfrac{Y}{P}$，其中 S_1 是消费率(国民收入总额中用于消费所占的比例)，S_2是居民消费率(消费总额中用于居民消费所占的比例)。

$Z=S_1S_2\dfrac{Y}{P}$ 是以 Y、P 为自变量，Z 为因变量的二元函数。

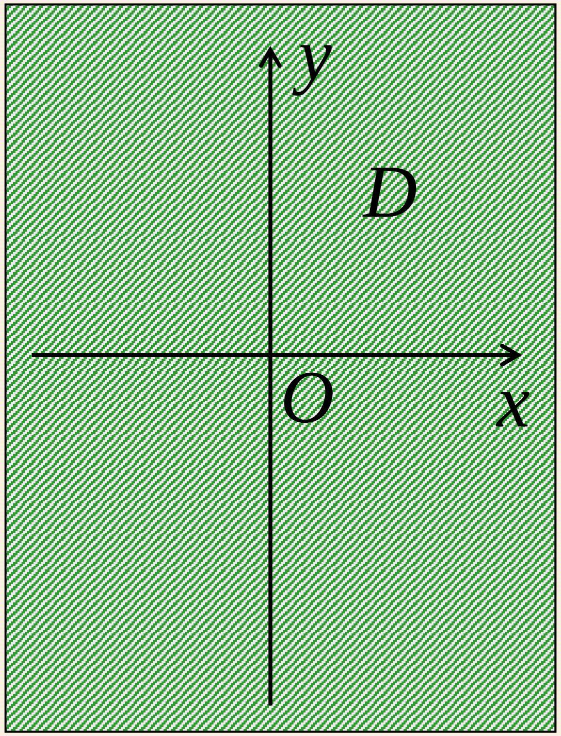
函数 $Z=S_1S_2\dfrac{Y}{P}$ 的定义域为 $D(f)=\{(Y,P)|Y>0, P>0\}$。

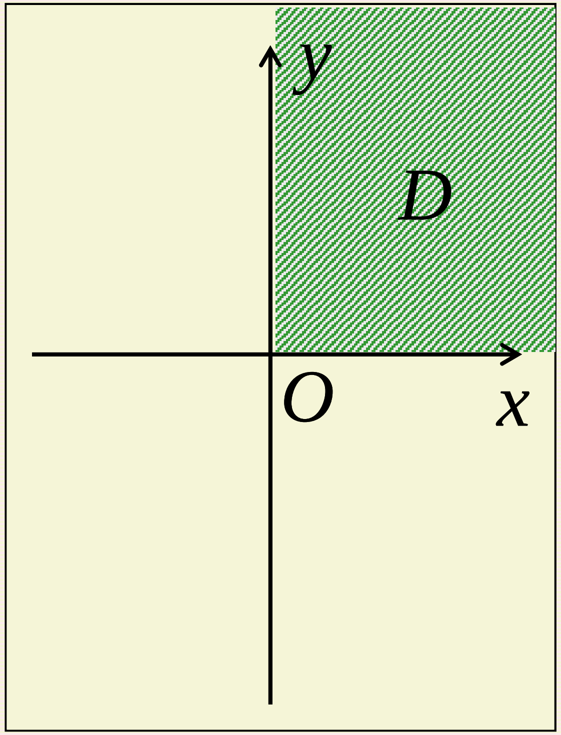
函数 $Z=S_1S_2\dfrac{Y}{P}$ 的值域为 $Z(f)=\{Z|Z>0\}$。

二、二元函数的定义域

函数$z=f(x, y)$的定义域在几何上表示一个平面区域。

所谓**平面区域**可以是整个xOy平面或者是xOy平面上由几条曲线所围成的部分。

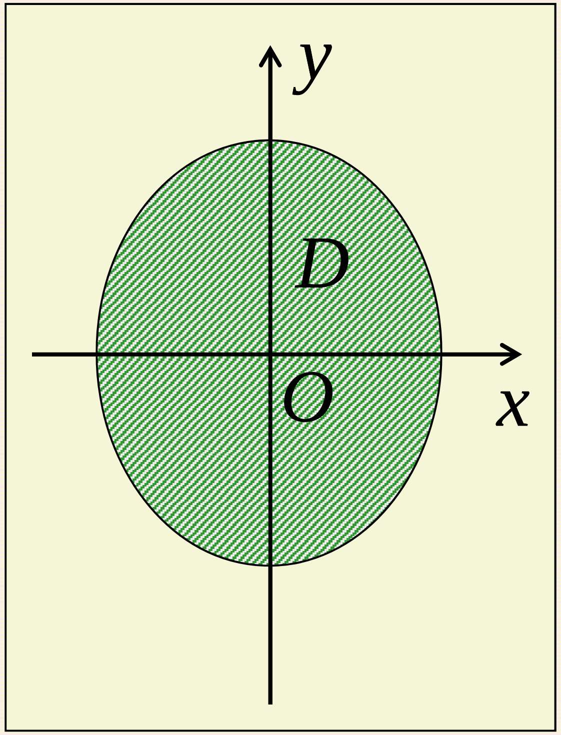


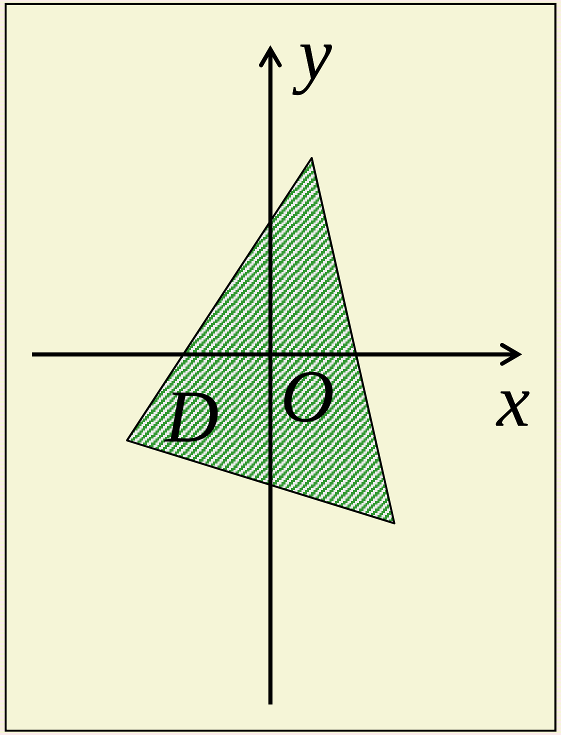


二、二元函数的定义域（续）

函数$z=f(x, y)$的定义域在几何上表示一个平面区域。

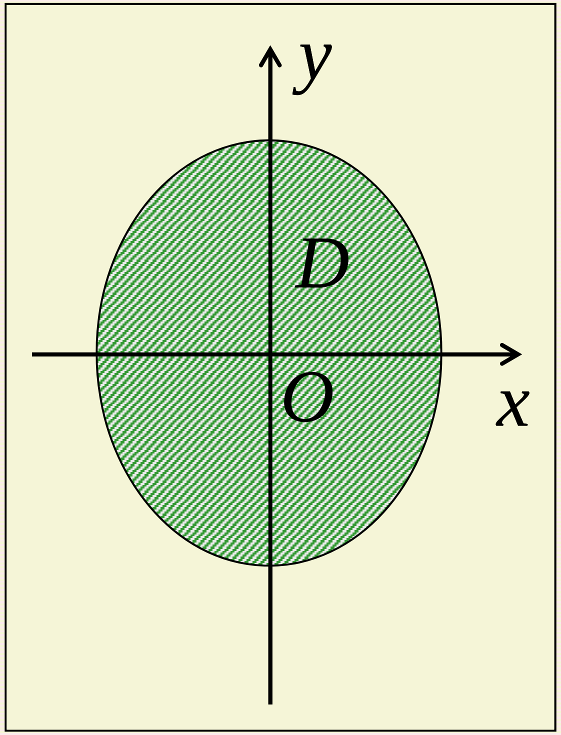
所谓**平面区域**可以是整个xOy平面或者是xOy平面上由几条曲线所围成的部分。

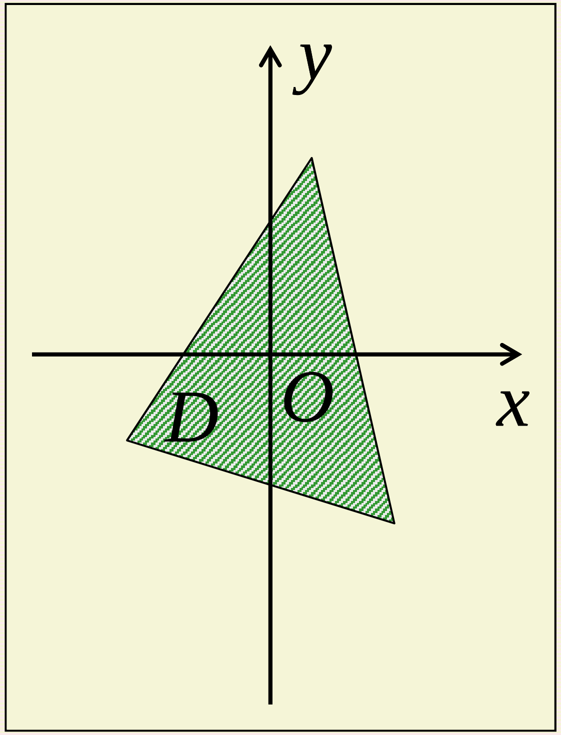




二、二元函数的定义域（续）

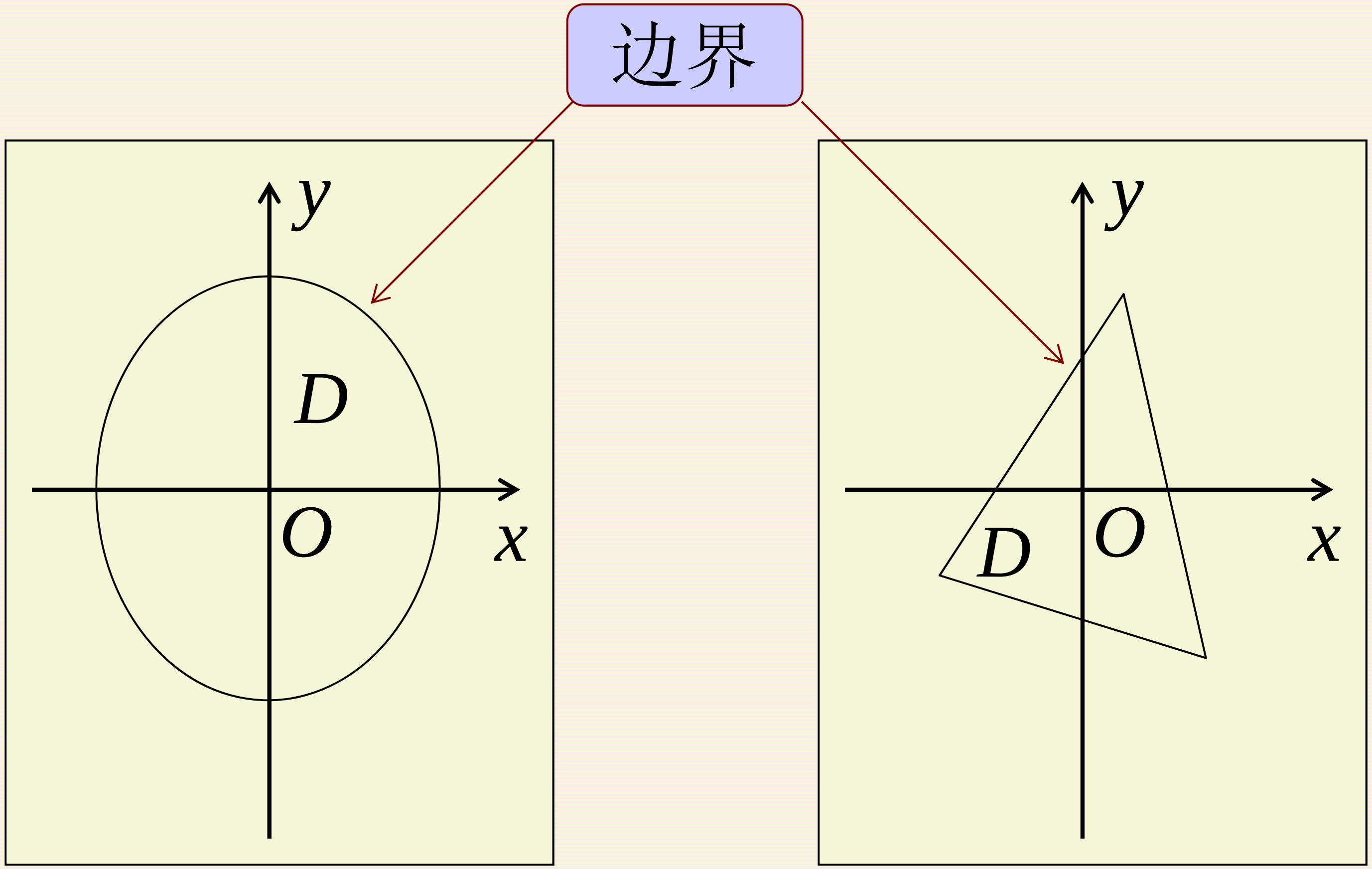
围成平面区域的曲线称为该区域的**边界**，包括边界在内的区域称为**闭区域**，不包括边界的区域称为**开区域**。





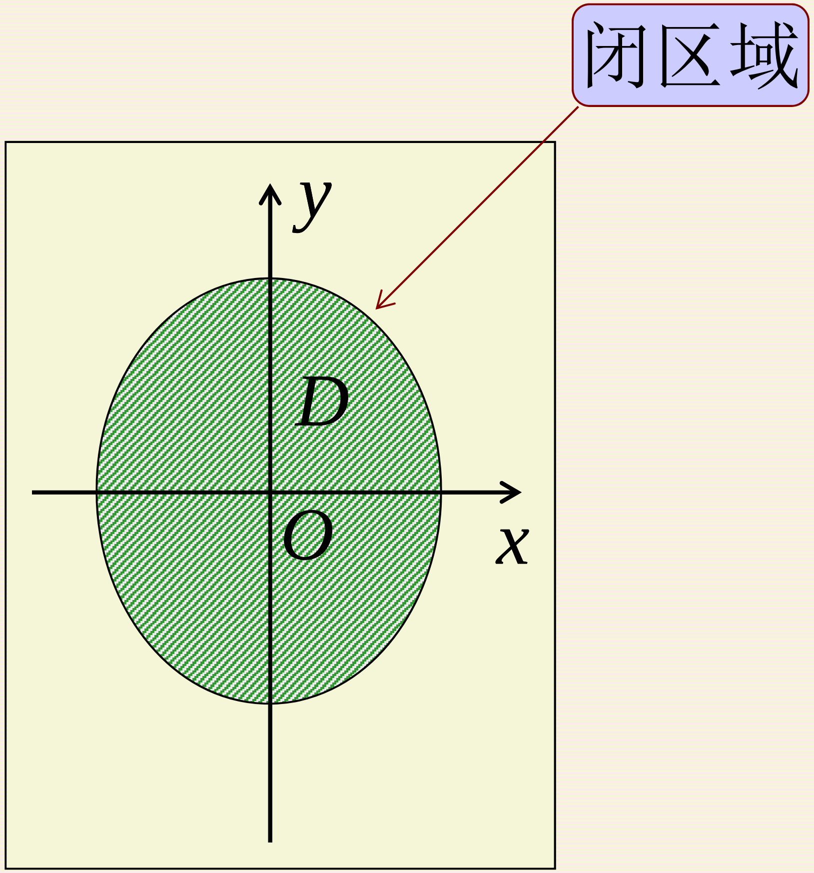
二、二元函数的定义域（续）

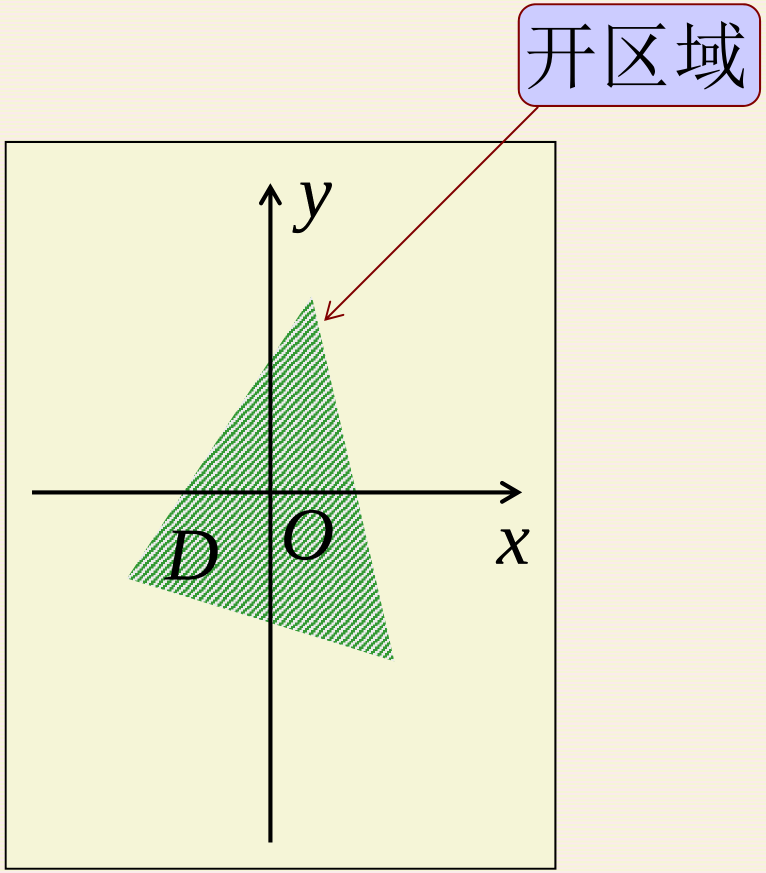
围成平面区域的曲线称为该区域的**边界**，包括边界在内的区域称为**闭区域**，不包括边界的区域称为**开区域**。



二、二元函数的定义域（续）

围成平面区域的曲线称为该区域的**边界**，包括边界在内的区域称为**闭区域**，不包括边界的区域称为**开区域**。



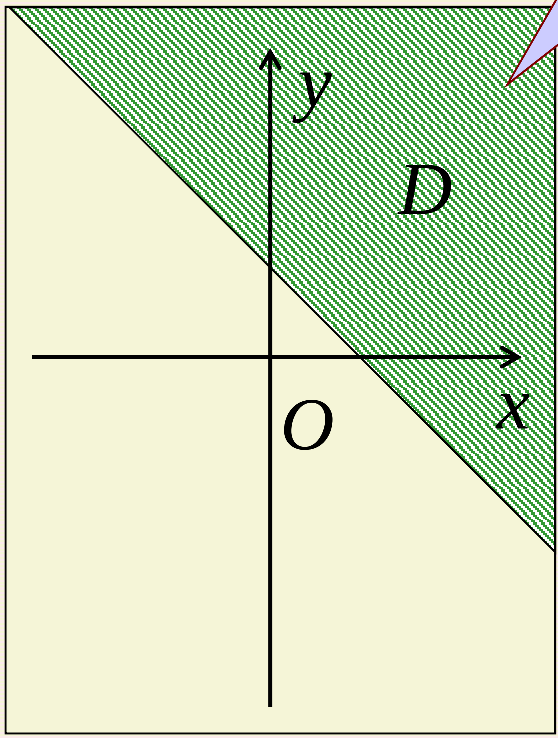


二、二元函数的定义域（续）

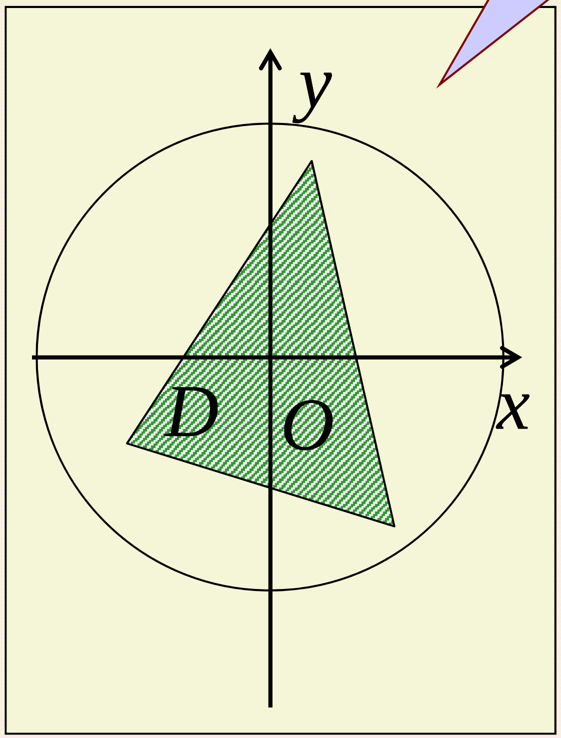
如果区域延伸到无穷远处，则称为**无界区域**，否则称为**有界区域**。

有界区域总可以包含在一个以原点为圆心的相当大的圆域内。

无界区域



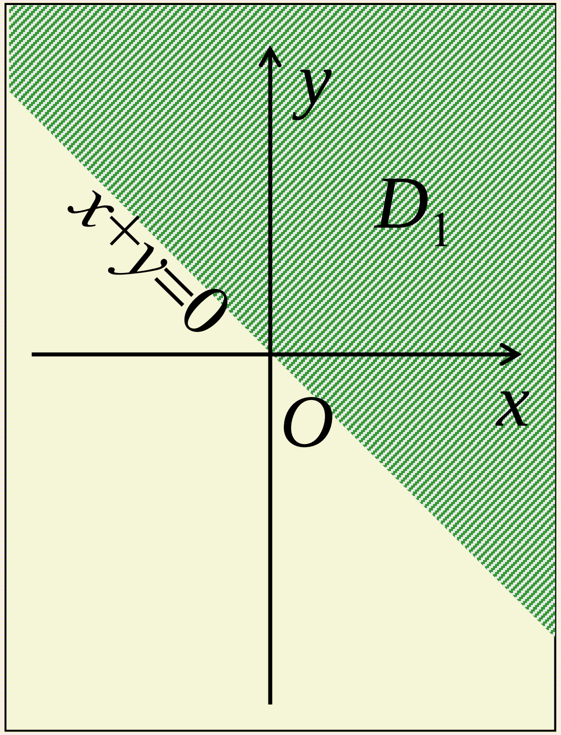
有界区域

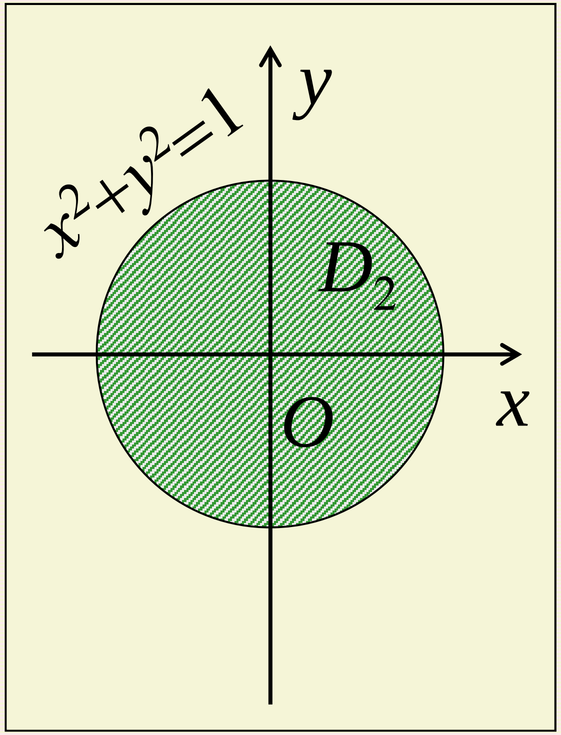


二、二元函数的定义域（续）

函数$z=\ln(x+y)$的定义域为$D_1=\{(x,\ y)|x+y>0\}$，它是无界开区域。

函数$z=\arcsin(x^2+y^2)$的定义域为$D_2=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leq 1\}$，它是有界闭区域。





三、二元函数的几何意义

设$z=f(x, y)$的定义域为D，则对于任意 $M(x, y)\in D$，可唯一确定空间的一点

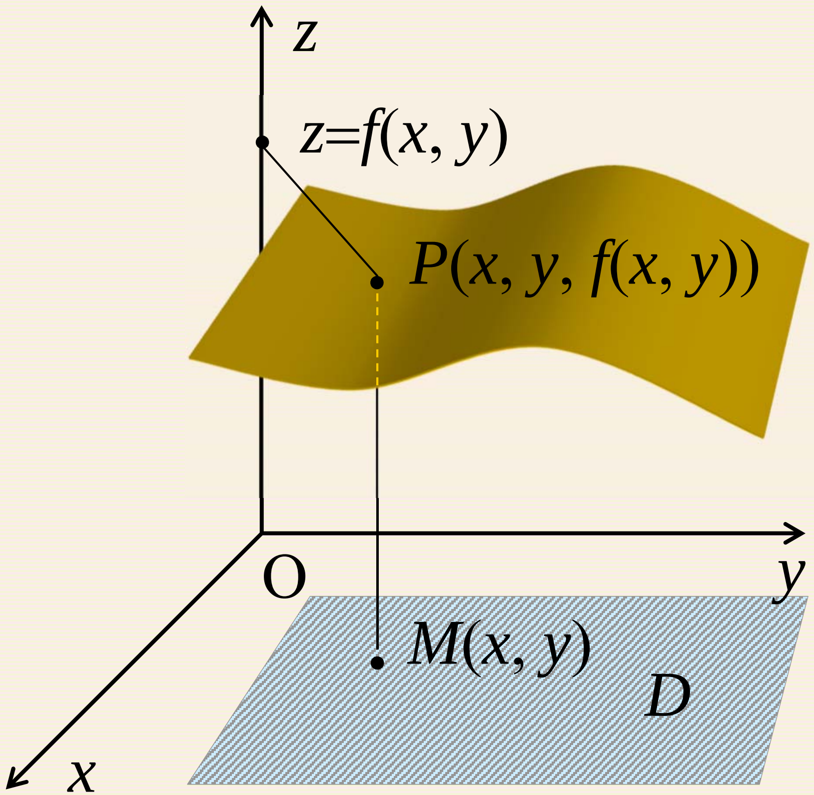
$$P(x, y, f(x, y))。$$

所有这样确定的点的集合

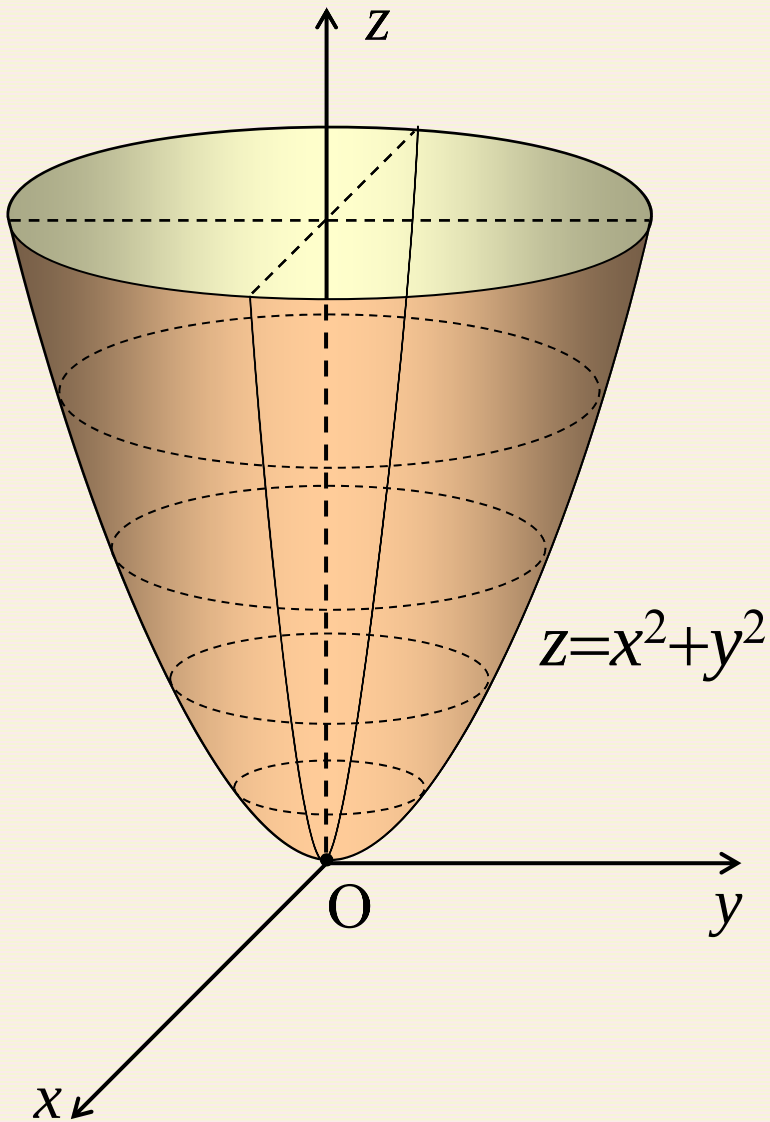
$\{(x, y, z)|z=f(x, y)，(x, y)\in D\}$

就是函数 $z=f(x, y)$的图形。

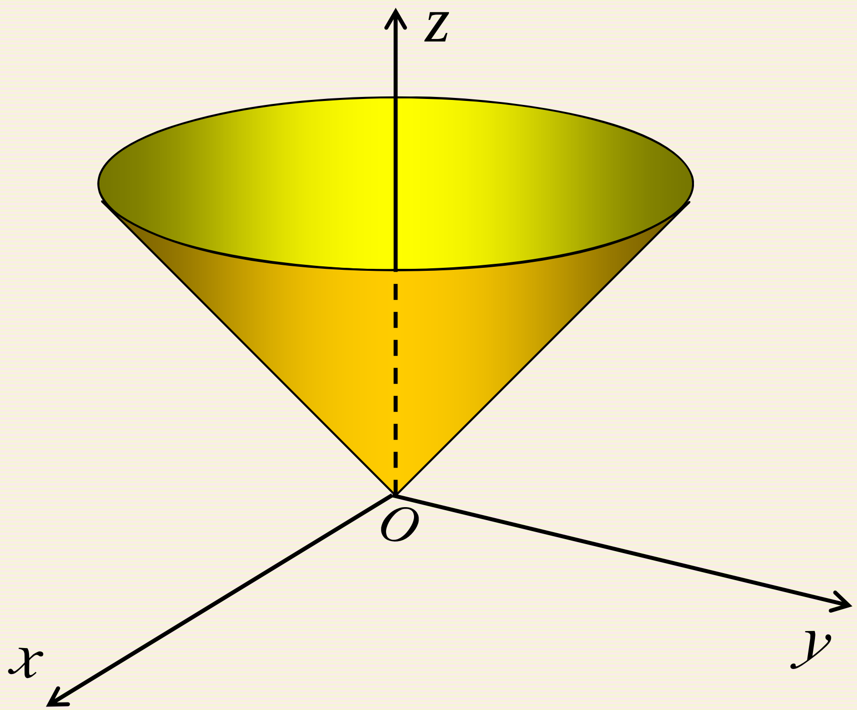
二元函数的图形是一张曲面。



例4 函数$z=x^2+y^2$的图形是旋转抛物面。



例5 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形是锥面。



四、二元函数的极限与连续

定义 6.3：设二元函数 $z = f(x, y)$ **在点** $P_0(x_0, y_0)$ **的某个去心邻域内有定义，当点** $P(x, y)$ **沿任何路径趋向点** $P_0(x_0, y_0)$ **时，** $f(x, y)$ **无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 是** $f(x, y)$ **当** $(x, y) \to (x_0, y_0)$ **时的极限。记为：**

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

说明：

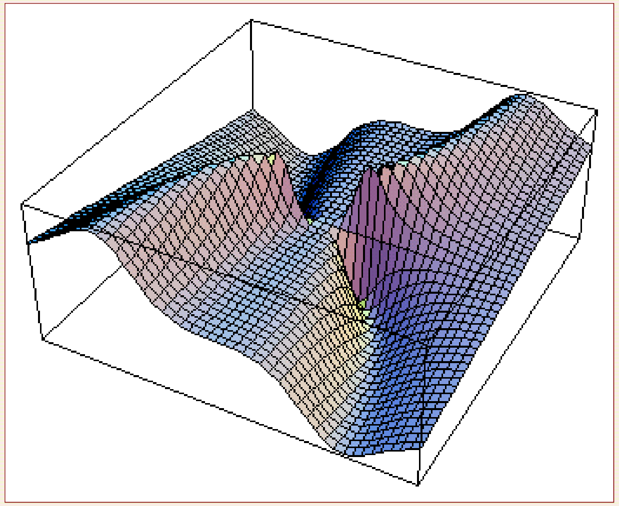
（1）定义中 $P \to P_0$ 的方式是任意的；

（2）二元函数的极限也叫二重极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$;

（3）二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

例如： $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

例6：证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在.



证 取 $y=kx^3$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}}\frac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2},$$

其值随k的不同而变化，

故极限不存在.

确定极限不存在的方法：（了解）

（1） 令$P(x,y)$沿$y=kx$趋向于$P_0(x_0,y_0)$，若极限值与 k有关，则可断言极限不存在；

（2）找两种不同趋近方式，使$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，

但两者不相等，此时也可断言$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处极限不存在.

例7 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$.

所用知识点：$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$($u$是$\to 0$的整体)

解

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y$$

$$\overset{u=xy}{=\!=\!=\!=}\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}\cdot\lim_{y\to 2}y$$

$$=1\times 2=2$$

例8 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$.

解：

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}.$$

$$\underline{\underline{\text{分子有理化}}}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)\cdot(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}$$

$$\overset{\text{约分}}{=\!=\!=\!=\!=}\ \frac{1}{2}$$

二元函数的连续性

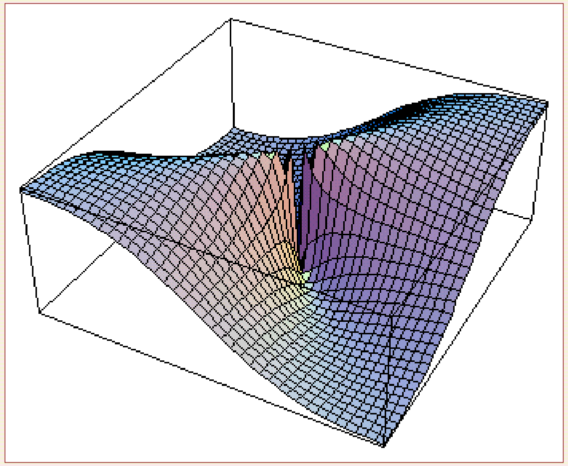
定义：设函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内有定义，如果：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

则称函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处连续，则点P_0称为$z=f(x,y)$的连续点。

例9 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$



在(0,0)的连续性.

解 取 $y=kx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随k的不同而变化，极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续. (称为间断点)

闭区域上连续函数的性质

- 最大值、最小值定理
- 有界性定理
- 介值定理

作　　业

- P265　2，3(2，　3)，4(2，　5)；
- 选做：P265 7