§6.1 空间解析几何简介

一、空间直角坐标系

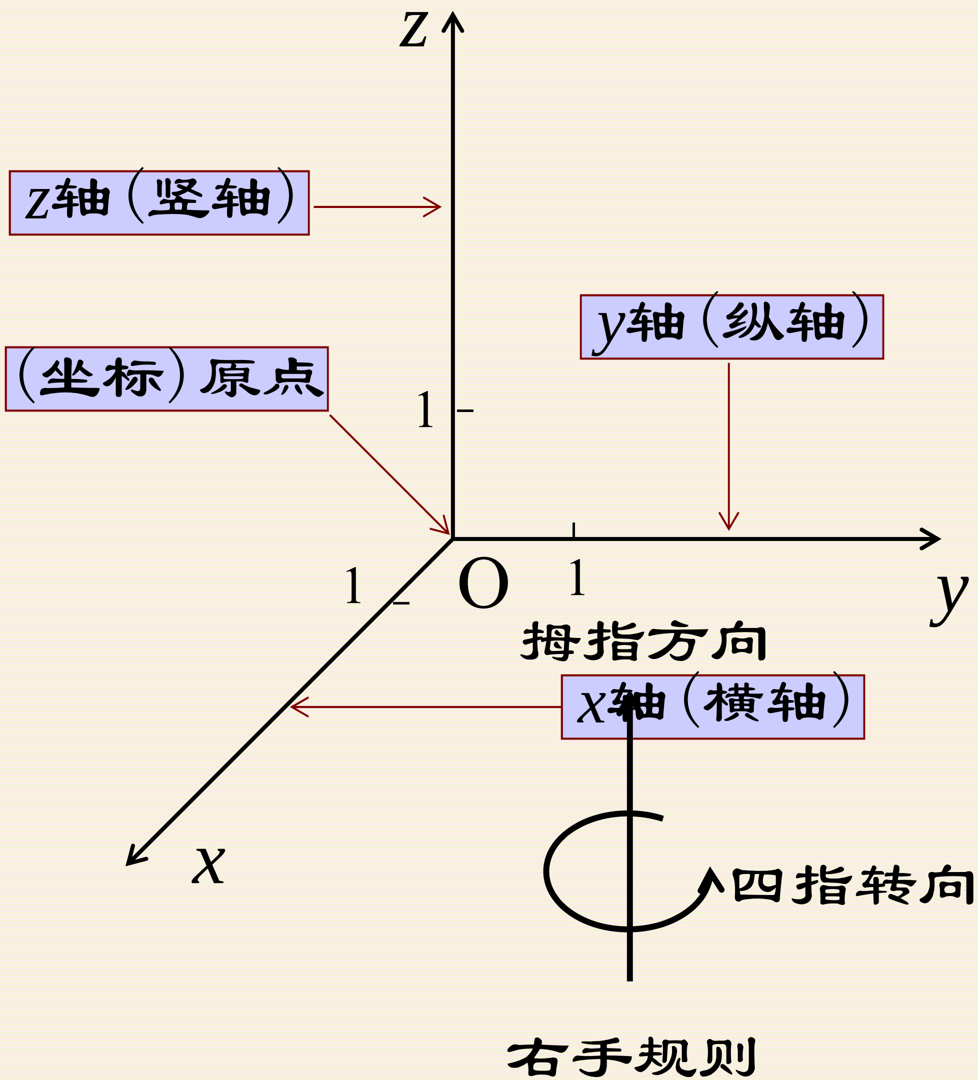
二、空间两点间的距离

三、曲面与方程

一、空间直角坐标系

空间直角坐标系:

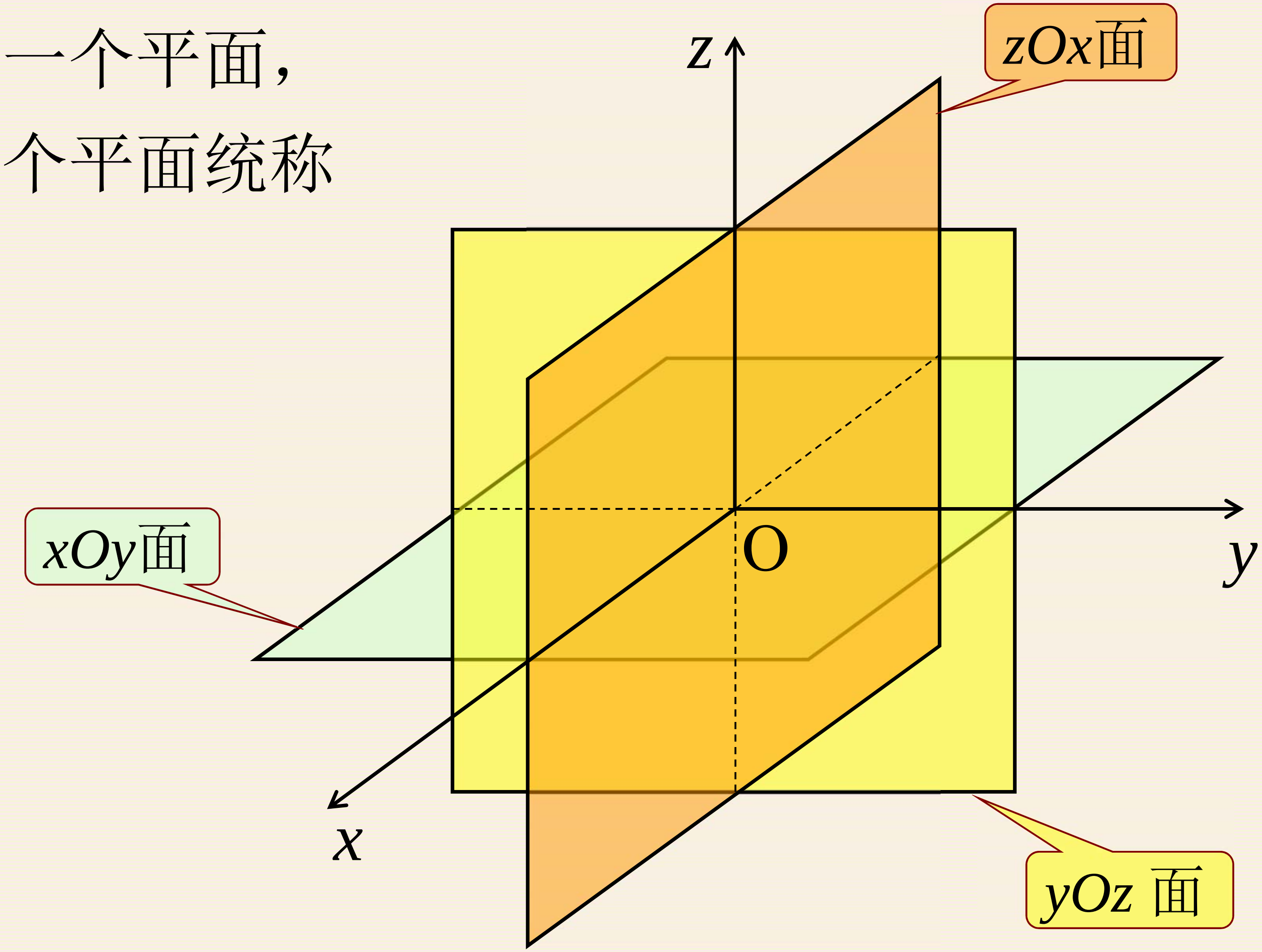
过空间一个定点O，作三条互相垂直的数轴，它们都以O为原点且一般具有相同的长度单位。它们的正向通常符合右手规则。这样的三条坐标轴就组成了一个空间直角坐标系。



•练习

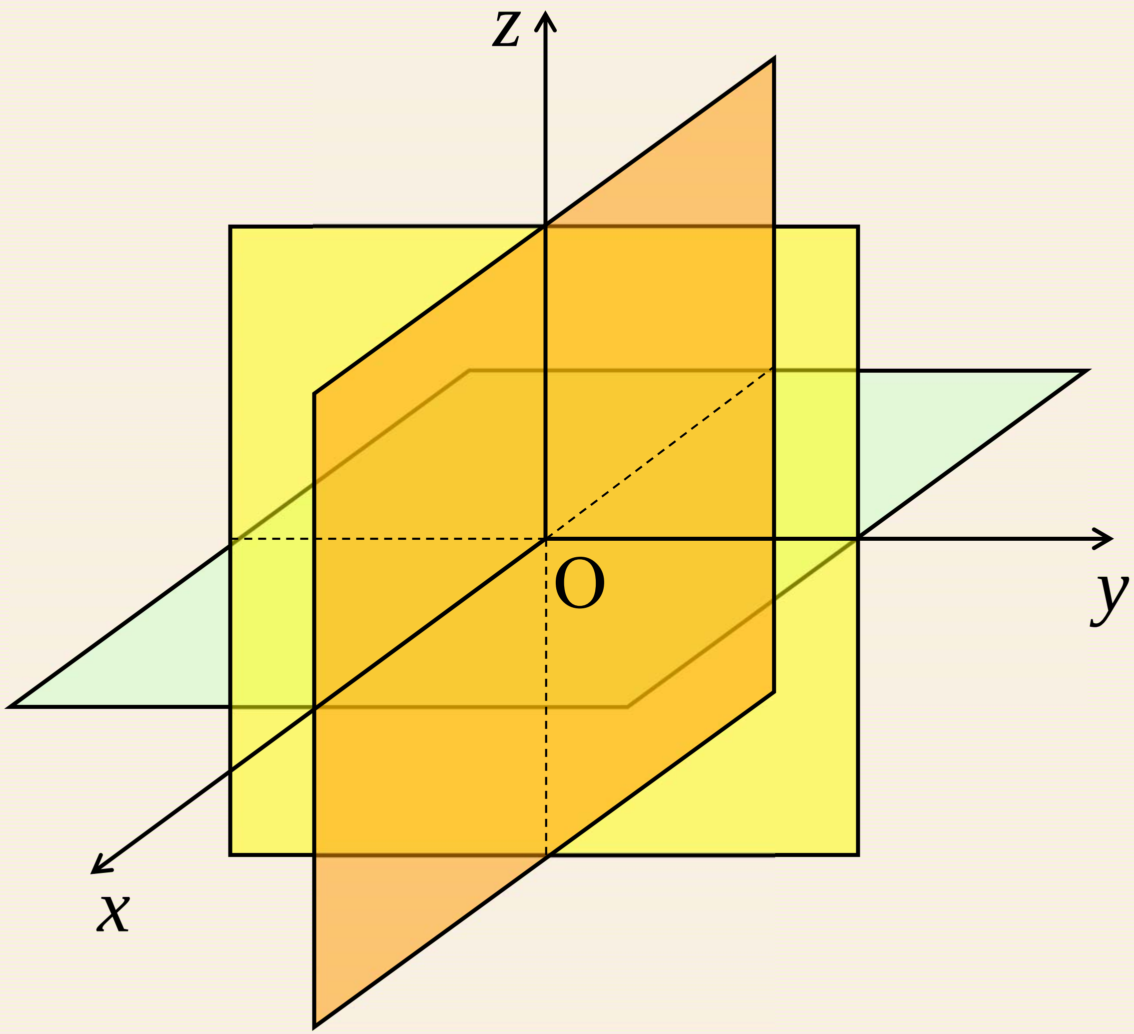
坐标面：

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面。



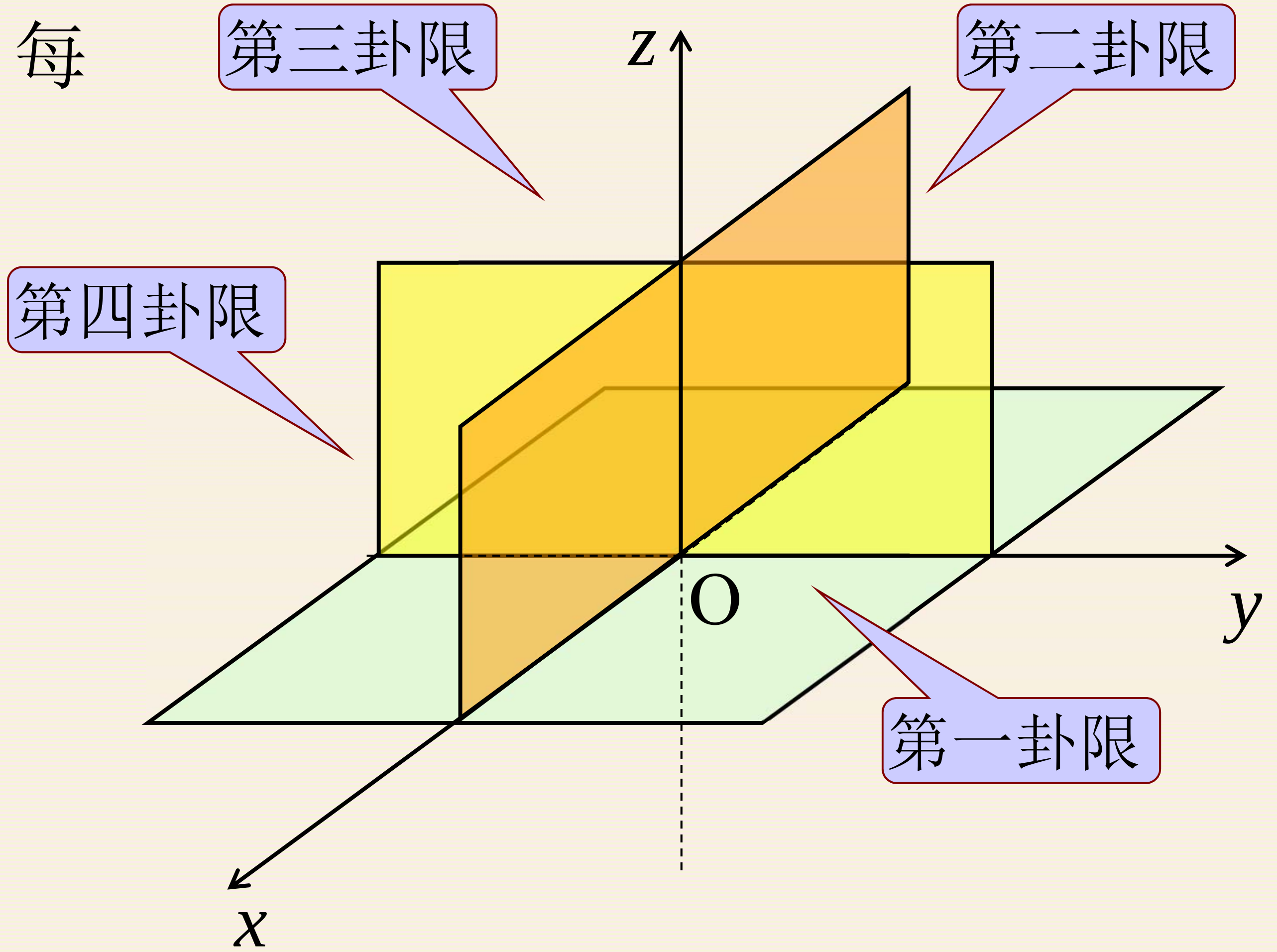
卦限：

三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限。



卦限：

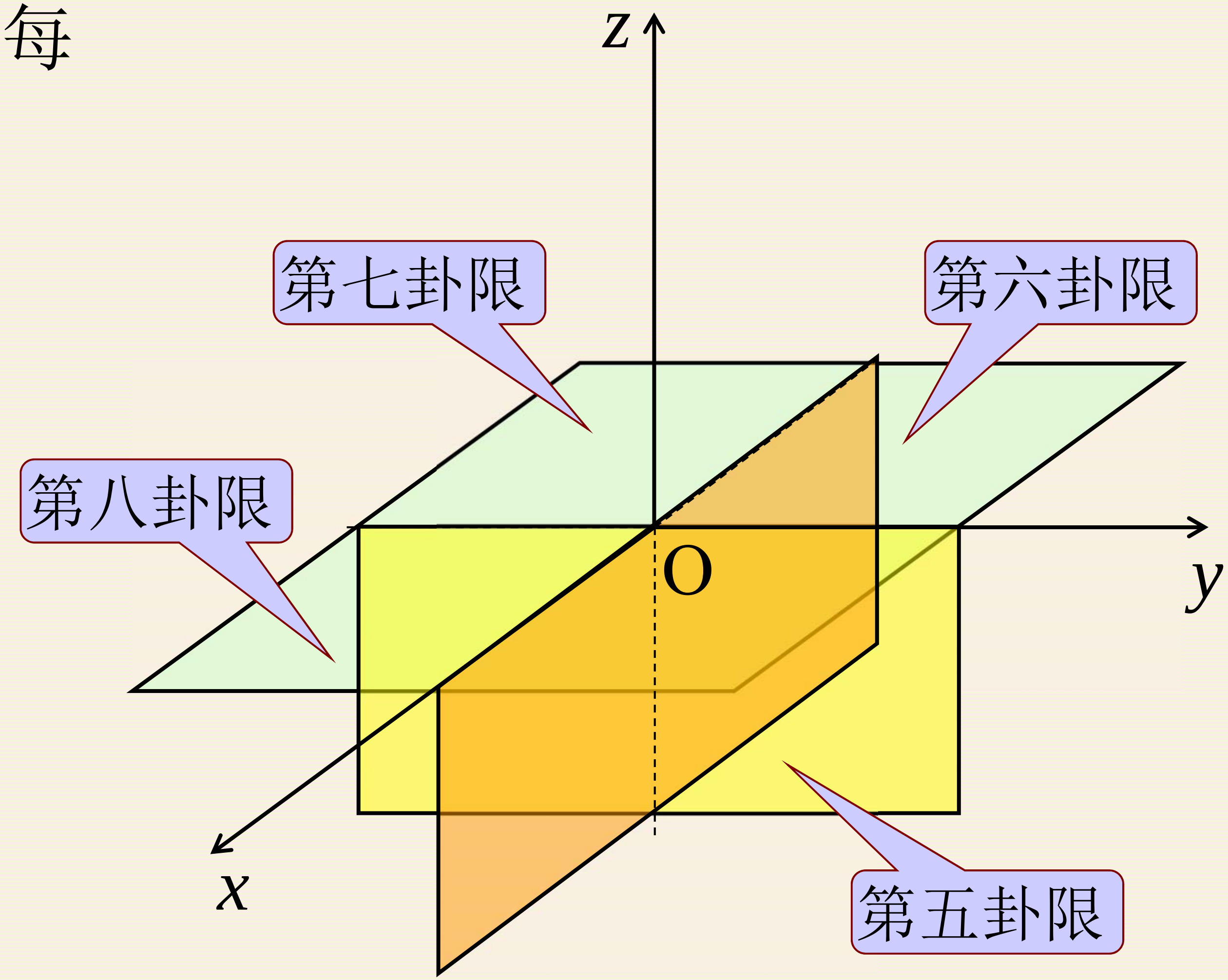
三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限。



封限：

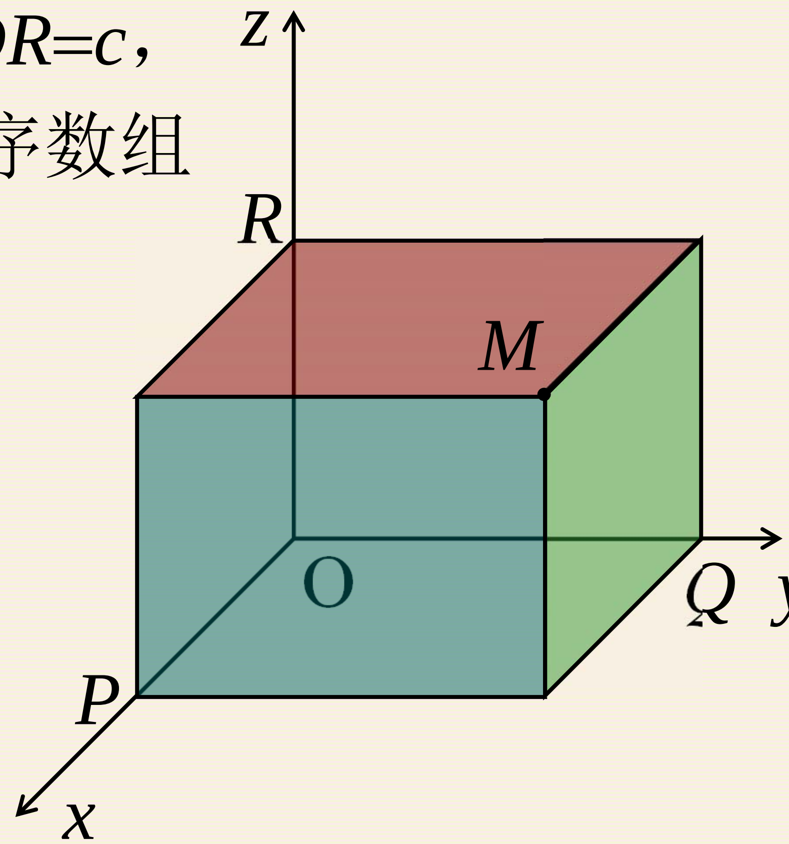
三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做封限。

•**练习**



点的坐标：

设M为空间一点，过点M作三个平面，分别垂直于x轴、y轴和z轴，得到三个平面在x轴、y轴、z轴上的交点P、Q、R。设$OP=a$、$OQ=b$、$OR=c$，则点M唯一确定了一个三元有序数组(a, b, c)。



反之，对任意一个三元有序数组(a, b, c)，也可以唯一地确定空间的一个点M。

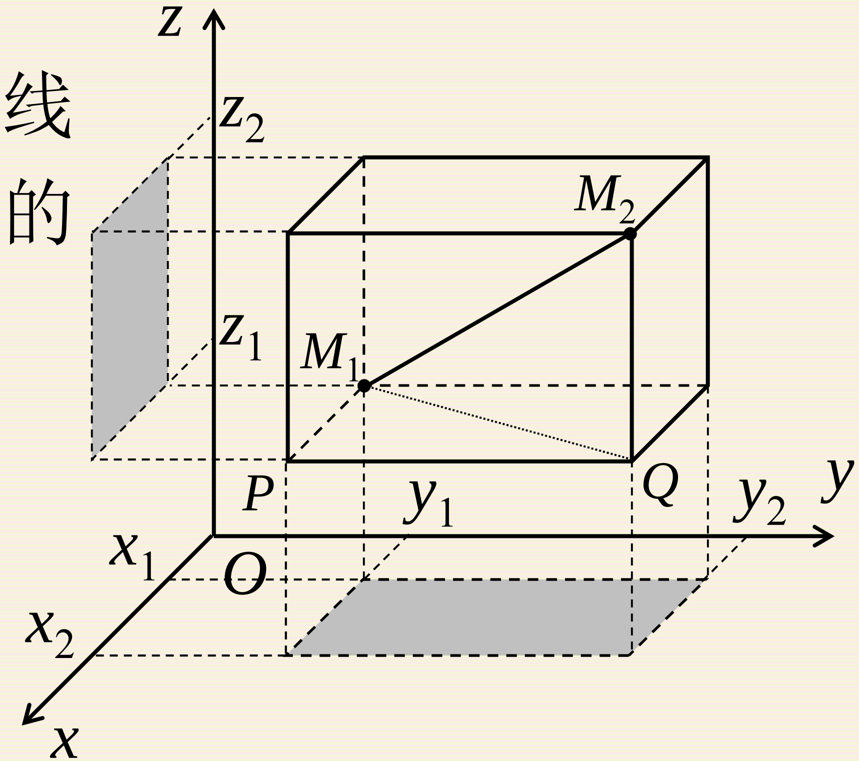
三元有序数组(a, b, c)称为点M的坐标，记为$M(a, b, c)$。

•练习

二、空间两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，求两点间的距离d。

作一个以 M_1和 M_2 为对角线顶点的长方体，使其三个相邻的面分别平行于三个坐标面。



注意：$|M_1P|=|x_2-x_1|$，

$|PQ|=|y_2-y_1|$，

$|M_1Q|=|z_2-z_1|$。

因为 $|M_1M_2|^2=|M_1Q|^2+|M_2Q|^2=|M_1P|^2+|PQ|^2+|M_2Q|^2$，

所以 $d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$。

二、空间两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，则两点间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}。$$

特殊地，点$M(x, y, z)$与原点$O(0, 0, 0)$的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}。$$

二、空间两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，则两点间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\text{。}$$

例1 求证以$M_1(4, 3, 1)$、$M_2(7, 1, 2)$、$M_3(5, 2, 3)$三点为顶点的三角形是一个等腰三角形。

解： 因为 $|M_1M_2|^2 = (7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14$，

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|M_1M_3|^2 = (5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2=6,$$

所以$|M_2M_3|=|M_1M_3|$，即$\Delta M_1M_2M_3$为等腰三角形。

二、空间两点间的距离

设$M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点，则两点间的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\text{。}$$

例2 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$和 $B(3, 5, -2)$等距离的点。

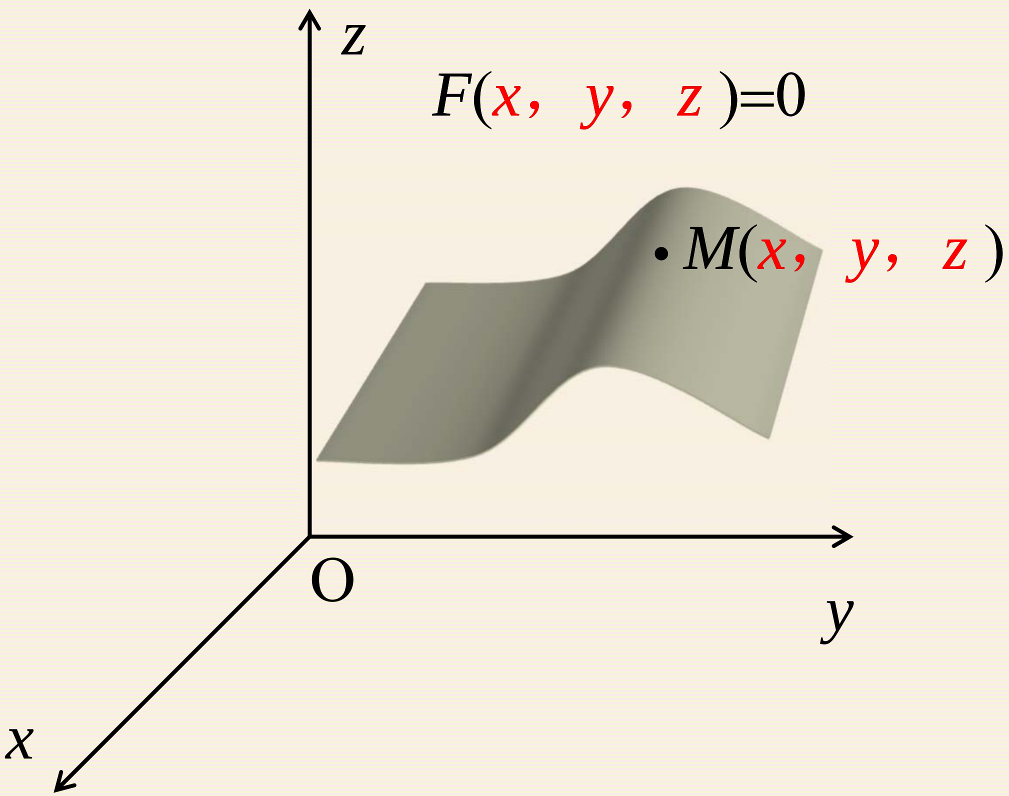
解： 设所求的点为$M(0, 0, z)$，则有$|MA|^2=|MB|^2$，

即 $$(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2=(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2\text{。}$$

解之得 $z=\dfrac{14}{9}$，所以，所求的点为 $M(0, 0, \dfrac{14}{9})$。

三、曲面与方程

如果曲面S上任意一点的坐标都满足方程$F(x, y, z)=0$，而不在曲面S上的点的坐标都不满足方程$F(x, y, z)=0$，那么方程$F(x, y, z)=0$称为曲面S的方程，而曲面S称为方程$F(x, y, z)=0$的图形。



例3 一动点$M(x, y, z)$与二定点$M_1(1,-1,0)$、$M_2(2,0,-2)$的距离相等，求此动点M的轨迹方程。

解：依题意有$|MM_1|=|MM_2|$，由两点间距离公式得

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z+2)^2}。$$

化简后可得点M的轨迹方程为

$$x+y-2z-3=0。$$

动点M的轨迹是线段M_1M_2的垂直平分面，因此上面所求的方程是该平面的方程。

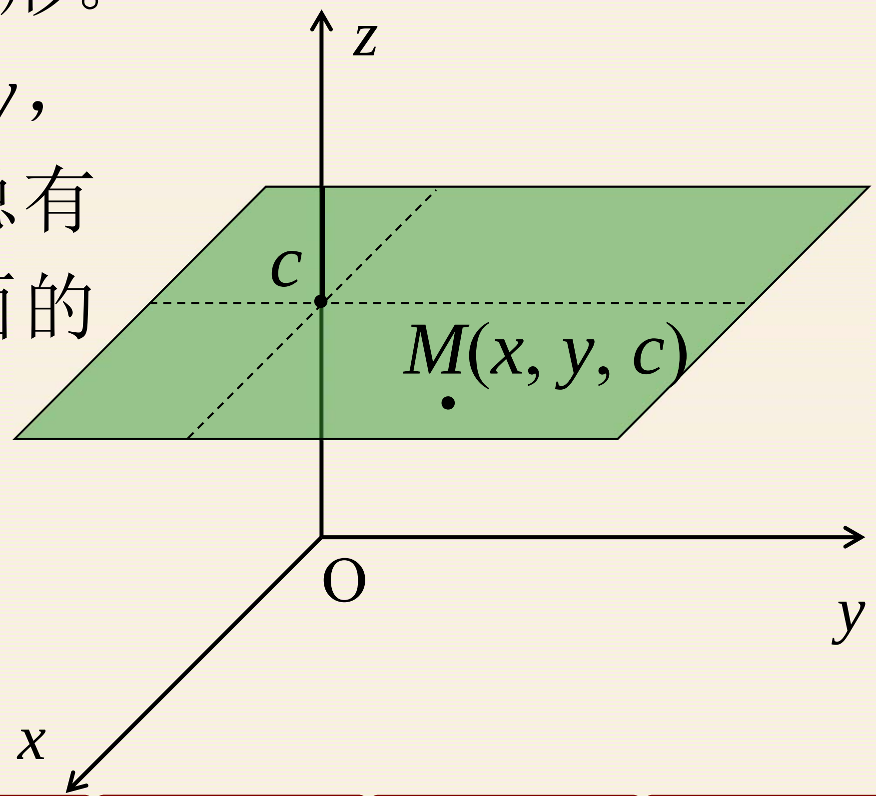
例4 求三个坐标平面的方程。

解： 注意到xOy面上任一点的坐标必有$z=0$，而满足$z=0$的点也必然在xOy面上，所以xOy面的方程为$z=0$。

同理，yOz面的方程为$x=0$；zOx面的方程为$y=0$。

例5 作$z=c$(c为常数)的图形。

解： 方程$z=c$中不含x、y，这意味着x与y可取任意值而总有$z=c$，其图形是平行于xy平面的平面。



平面方程：

前面讨论了几个平面的方程，它们都是一次方程，可以证明空间内任意一个平面的方程为三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中A、B、C、D均为常数，且A、B、C不全为0。

几类特殊的平面方程：

- 通过坐标原点： $Ax+By+Cz=0$
- 平行于x轴： $By+Cz+D=0$
- 平行于 xoy 平面： $Cz+D=0$

球面方程：

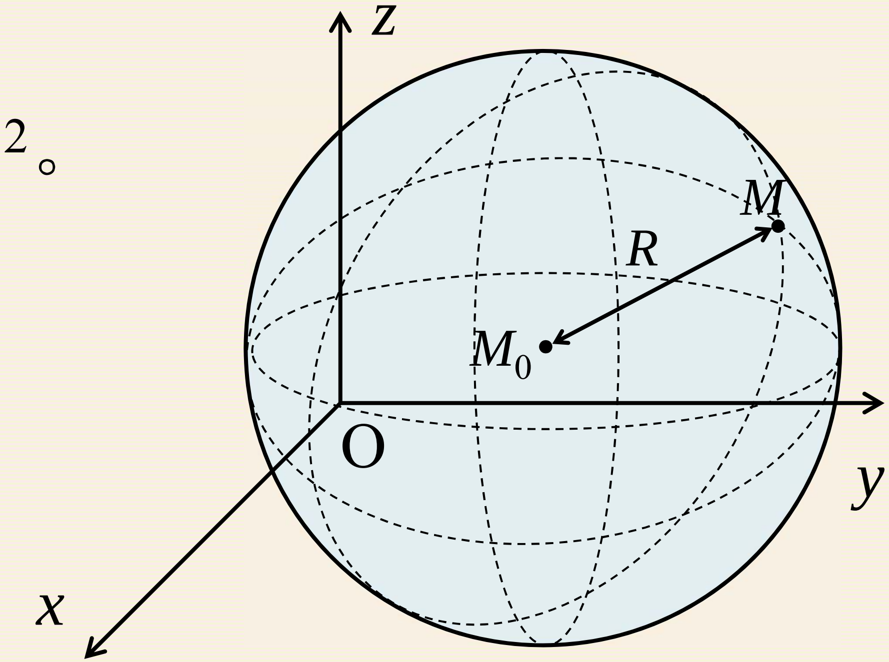
例6 求球心为点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面方程。

解： 设$M(x, y, z)$为球面上任意一点，则有$|MM_0|=R$，由距离公式有

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R。$$

化简得球面方程

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2。$$



球面方程：

球心为点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，半径为R的球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2。$$

特殊地，球心为原点的球面方程为

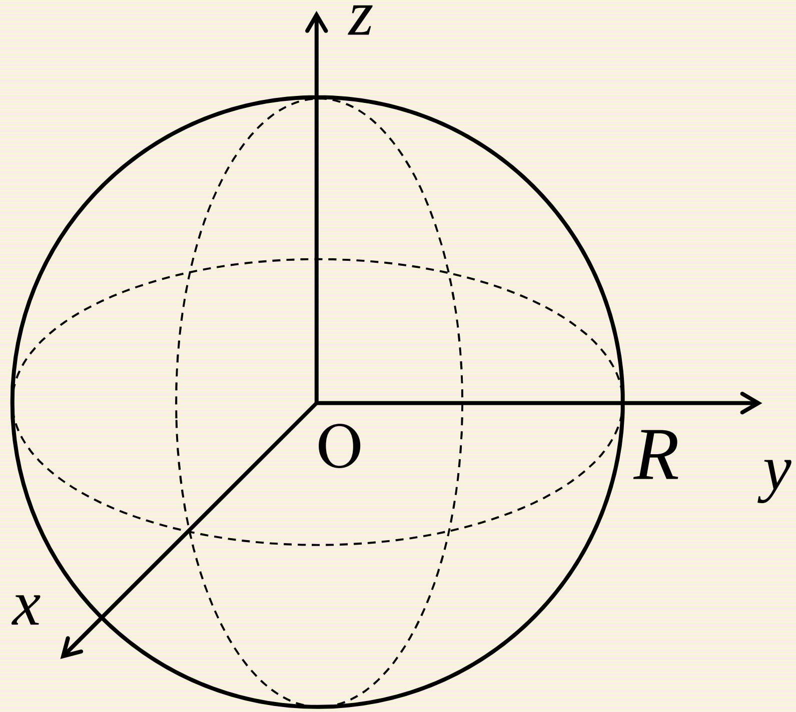
$$x^2+y^2+z^2=R^2。$$

上半球面方程为：

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ ;$$

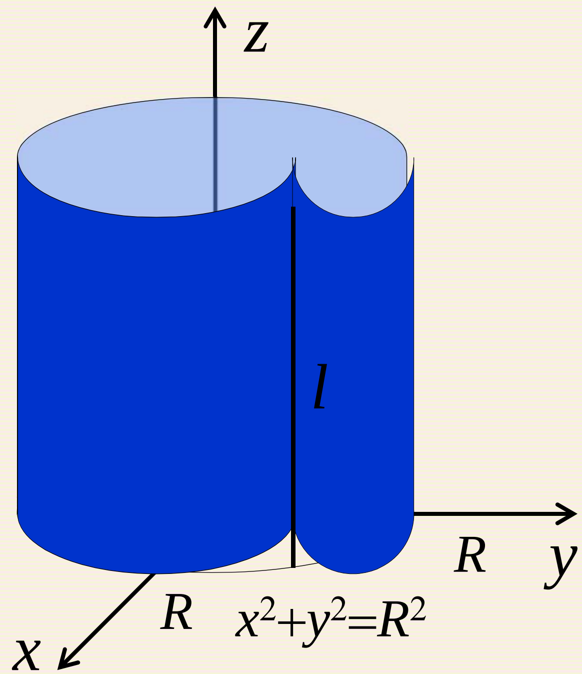
下半球面方程为：

$$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\ 。$$



例7 作曲面$x^2+y^2=R^2$的图形。

解： 方程$x^2+y^2=R^2$在 xOy 面上表示以原点为圆心、以R为半径的圆。



在空间直角坐标系中，任意作一条通过 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$且平行于 z 轴的直线，则直线上的点都满足方程 $x^2+y^2=R^2$，即直线在 $x^2+y^2=R^2$所表示的曲面上。

因此，这个曲面可以看成是由平行于 z 轴的直线 l 沿xOy 面上的圆$x^2+y^2=R^2$移动而形成的**圆柱面**。

直线 l 叫做它的母线，$x^2+y^2=R^2$叫做它的准线。

例8 作曲面$z=x^2+y^2$的图形。

解： 当$c>0$时，平面$z=c$与曲面的截痕为圆

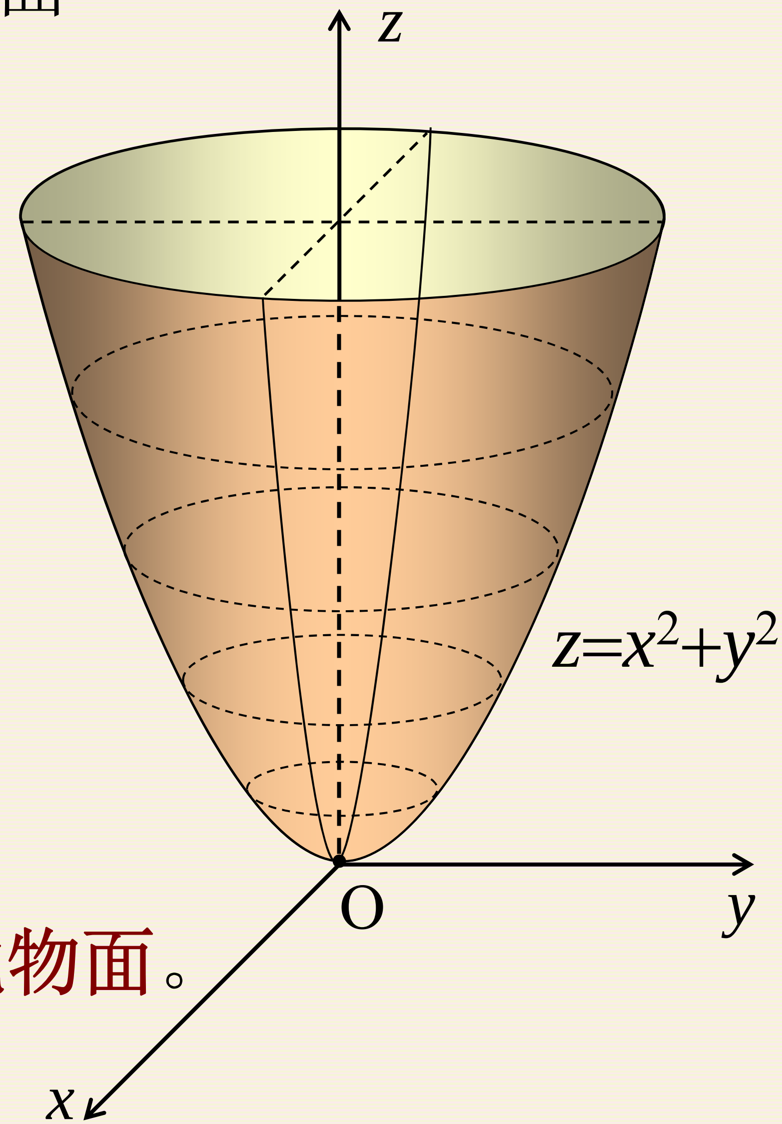
$x^2+y^2=c$， $z=c$。

当$c=0$时，平面$z=c$与曲面的截痕只为原点(0, 0, 0)。

当$c<0$时，平面$z=c$与曲面无截痕。

平面$x=a$或$y=b$与曲面的截痕均为抛物线。

我们称曲面$z=x^2+y^2$为**旋转抛物面**。



例9 作曲面 $z=y^2-x^2$ 的图形。

解： 当 $c\neq 0$ 时，平面 $z=c$ 与的截痕为双曲线

$y^2-x^2=c$，$z=c$。

当 $c=0$ 时，平面 $z=c$ 与曲面的截痕为直线

$y-x=0$，$z=0$； $y+x=0$，$z=0$。

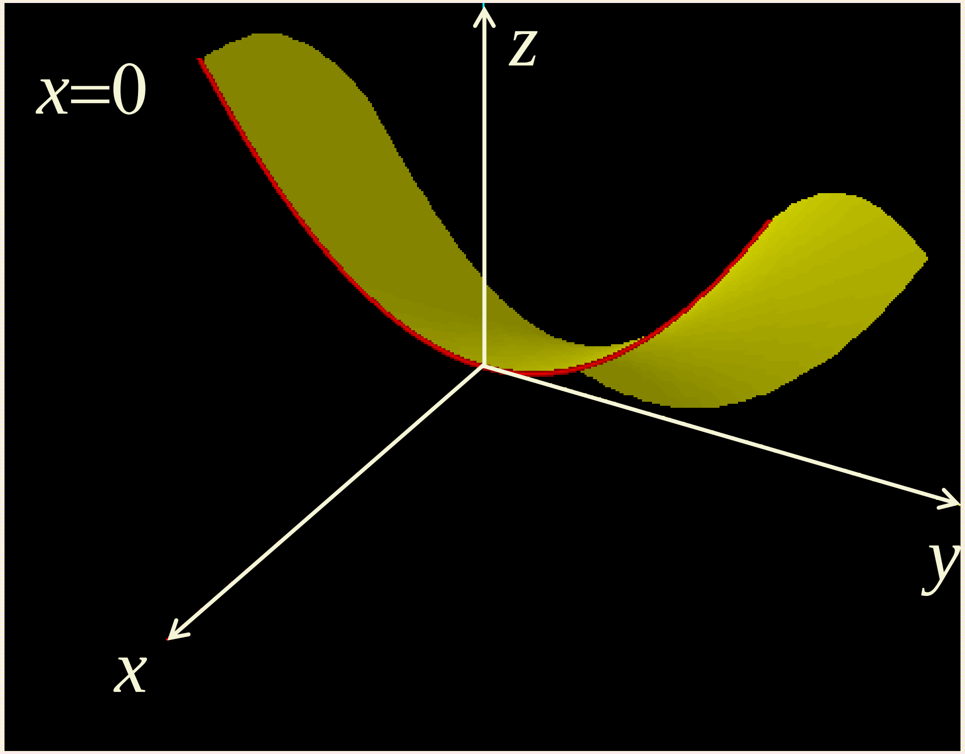
平面 $y=c$ 与曲面的截痕为抛物线

$z=c^2-x^2$，$y=c$。

平面 $x=c$ 与曲面的截痕为抛物线

$z=y^2-c^2$，$x=c$。

这个曲面称为**双曲抛物面**。



作业

- P258 4;
- P259 5; 7(3,4); 8(5,6,8,9); 10(5,6,7)