高等数学平时成绩计算公式:

$$0.2x + \frac{40y}{y_0} + z$$

x: 测试成绩 (满分 200 分).

y: 实交作业次数.

y_0: 应交作业次数.

z: 综合分 (满分 20 分).

高等数学期中测试题(满分120分)

一. 计算下列极限 (每小题8分, 共24分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right).$

2. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right).$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x+1}{4x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}.$

高等数学期中测试题(满分120分)

二. 解答下列各题 (每小题8分, 共32分)

1. $y = x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})$，求 dy .

2. $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t^5 - 5t \end{cases}$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 和 $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})$.

3. $y = \dfrac{x^3}{x+1}$，求 $y^{(10)}$.

4. 求曲线 $e^y + xy - x^2 = 0$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程.

高等数学期中测试题(满分120分)

三. 解答下列各题 (每小题8分, 共24分)

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}=2$，求常数 a, b 的值.

2. 求函数 $y=\dfrac{\ln|x|}{x^2+x-2}$ 的间断点，并判断其类型.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论其连续性.

高等数学期中测试题(满分120分)

四. (本题满分10分) 对函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2}$，填写下表

y'	
y''	
单调增加区间	
单调减少区间	
极值点	
极 值	
凹区间	
凸区间	
拐 点	
渐近线	

高等数学期中测试题(满分120分)

五. (本题满分10分)

作半径为 r 的球的外切正圆锥, 问此圆锥的高 h 为何值时, 其体积最小? 并求出该最小值.

六. (本题满分8分)

设 $f(x)$ 二阶可导, 过曲线 $y=f(x)$上点 A 的切线与曲线 $y=f(x)$有另一交点 B, 证明存在 ξ, 使 $f''(\xi)=0$.

七. (本题满分12分)

设 $x \in (0,1)$，证明:

(1) $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$;

(2) $\dfrac{1}{\ln 2} - 1 < \dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{2}$.

不定积分测试题(满分80分)

1. $\int \frac{1}{x^2}\tan(1-\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$;

2. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

3. $\int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})}\,\mathrm{d}x$;

4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$;

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}$;

7. $\int 3x^2 \arctan x\,\mathrm{d}x$;

8. $\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}\,\mathrm{d}x$;

9. $\int \cos\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$;

10. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+2)}\,\mathrm{d}x$.

设 $x\in(0,1)$，证明:

(1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$;

(2) $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

证明 (1) 令 $f(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2+x}{2\sqrt{(1+x)^3}}=-\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{2\sqrt{(1+x)^3}}$$

当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，于是 $f(x)<f(0)=0$，

即 $$\ln(1+x)-\frac{x}{\sqrt{1+x}}<0,$$

也即 $$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2.$$

设 $x\in(0,1)$，证明:

(1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$;

(2) $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$.

证明 (2) 令 $g(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}$,

则 $g'(x)=-\dfrac{1}{(1+x)\ln^2(1+x)}+\dfrac{1}{x^2}$

$$=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

由(1)知,当 $0<x<1$ 时, $g'(x)<0$,

于是 $g(x)>g(1)=\dfrac{1}{\ln 2}-1$,

$$g(x)<\lim_{x\to0^+}g(x)$$

$$=\lim_{x\to0^+}[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}]$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}(1-\frac{1}{1+x})\cdot\frac{1}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2},$$

即得所证.

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}+x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}$$

$$=-\frac{1}{2}$$