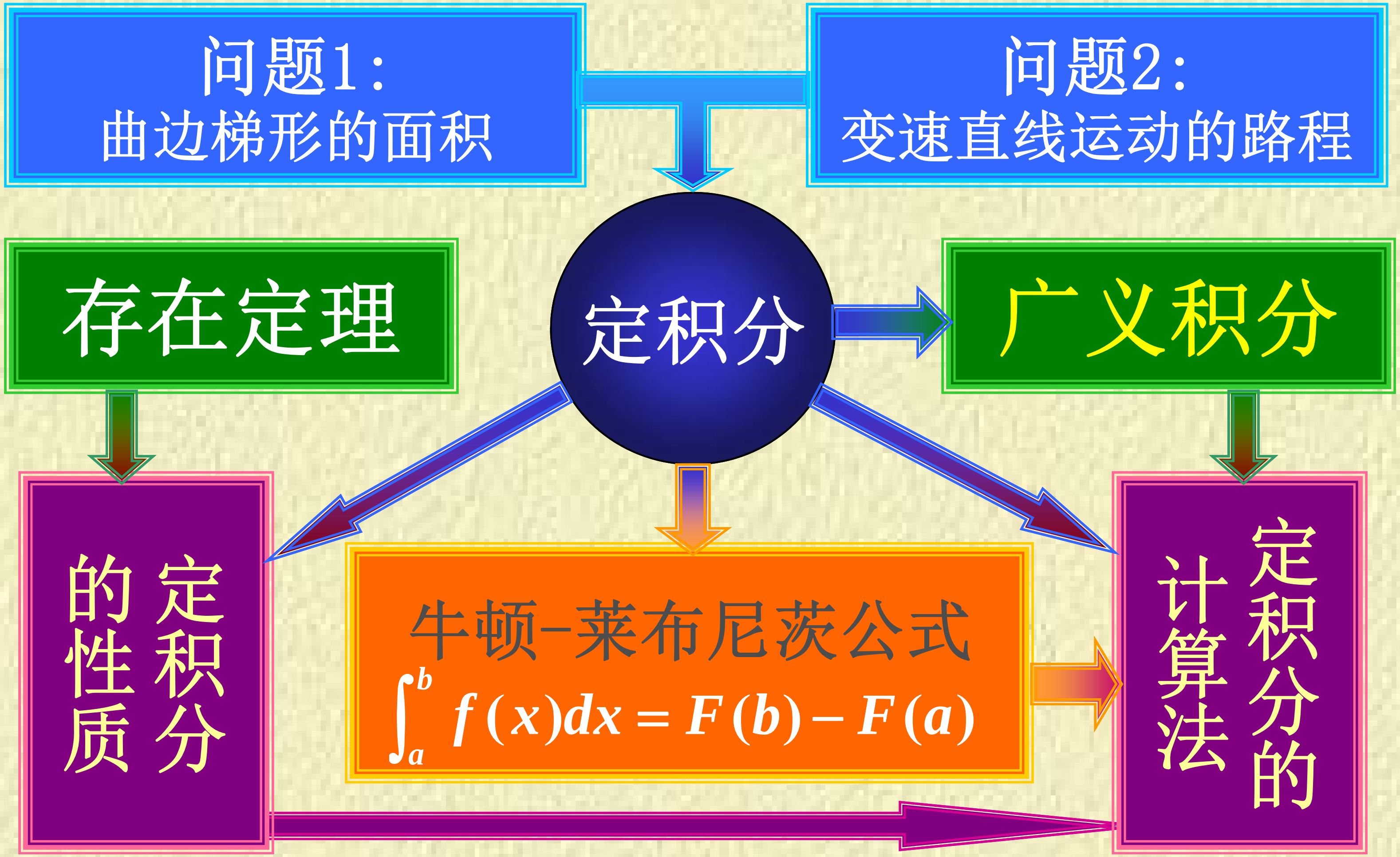
第五章 定积分

习题课

一、主要内容框图

二、典型例题

一、主要内容框图



问题1:
曲边梯形的面积
问题2:
变速直线运动的路程
存在定理
定积分
广义积分
定积分的性质
牛顿–莱布尼茨公式
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$
定积分的计算法

二、典型例题

例1. 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$.

解: 因为 $x\in[0,1]$时，$0\le \frac{x^n e^x}{1+e^x}\le x^n$, 所以

$$0\le \int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$$

利用夹逼准则得 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = 0$

例2. 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\Lambda+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$

解： 将数列适当放大和缩小，以简化成积分和：

$$\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}<\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\boxed{\frac{1}{k}}}<\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\pi}{n}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$

利用夹逼准则可知 $I=\dfrac{2}{\pi}.$

例3. 已知 $f(x)$ 在 $x>0$ 处连续, $f(1)=3$, 且由方程

$$\int_1^{xy} f(t)\,\mathrm{d}t = x\int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t + y\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

确定 y 是 x 的函数, 求 $f(x)$.

解: 方程两端对 x 求导, 得

$$f(xy)\cdot(y+xy') = \int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t + x\cdot f(y)\cdot y' + y'\int_1^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + y\cdot f(x)$$

令 $x=1$, 得 $f(y)y = \int_1^{y} f(t)\,\mathrm{d}t + yf(1)$

再对 y 求导, 得 $f'(y) = \frac{1}{y}f(1) = \frac{3}{y} \Longrightarrow f(y) = 3\ln y + C$

令 $y=1$, 得 $C=3$, 故 $f(x) = 3\ln x + 3$

例4. 设函数 $f(x)$连续, 且$\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$

已知 $f(1)=1$, 求$\int_1^2 f(x)dx$ 的值.

解: 令 $u=2x-t$, 则

$$\int_0^x tf(2x-t)dt=-\int_{2x}^x(2x-u)f(u)du$$

$$=2x\int_x^{2x}f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du$$

$$\frac{x}{1+x^4}=\frac{d}{dx}\int_0^x tf(2x-t)dt$$

$$=[2\int_x^{2x}f(u)du+4xf(2x)-2xf(x)]-[4xf(2x)-xf(x)]$$

$$=2\int_x^{2x}f(u)du-xf(x)$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{4}$$

例5. 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$.

解一: 令 $e^{-x}=\sin t$, 则 $x=-\ln\sin t$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{\cos t}{\sin t}\mathrm{d}t$,

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\cos t\,(-\frac{\cos t}{\sin t})\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc t-\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$=[\ln\left|\csc t-\cot t\right|+\cos t]\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例5. 求 $\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x$.

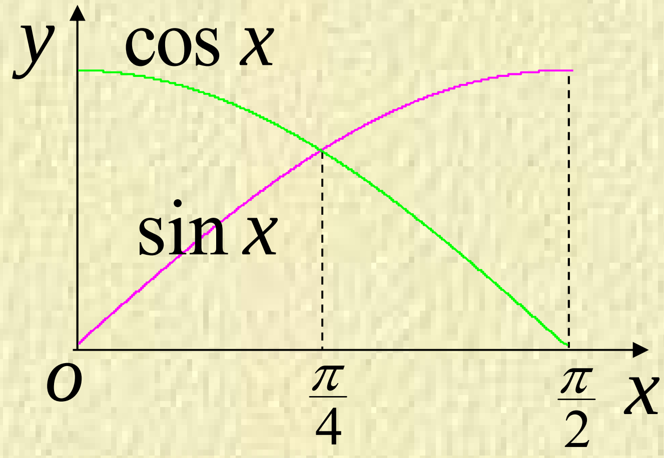
解二: 令 $t=\sqrt{1-e^{-2x}}$,则 $x=-\frac{1}{2}\ln(1-t^2),\ \mathrm{d}x=\frac{t}{1-t^2}\mathrm{d}t$,

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\left(\frac{1}{t^2-1}+1\right)\mathrm{d}t$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-t\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例6. 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}\,\mathrm{d}x$.



解: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\cos x\right|\mathrm{d}x$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)\,\mathrm{d}x$

$=[\sin x+\cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}+[-\cos x-\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=2(\sqrt{2}-1)$

例7. 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x.$

提示: 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$

解: $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln[1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln[1+\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}]\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{2}{1+\tan x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\ln 2-I$$

$$I=\frac{\pi}{8}\ln 2$$

例8. 选择一个常数 c , 使

$$\int_a^b (x+c)\cos^{99}(x+c)\,\mathrm{d}x = 0$$

解: 令 $t = x + c$, 则

$$\int_a^b (x+c)\cos^{99}(x+c)\,\mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} t\cos^{99} t\,\mathrm{d}t$$

因为被积函数为奇函数 , 故选择 c 使

$$a + c = -(b + c)$$

即

$$c = -\frac{a+b}{2}$$

可使原式为 0 .

例9. 设 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}\,\mathrm{d}y$，求 $\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

解:

$$\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}(x-1)^3 f(x)\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^1 (x-1)^3 e^{-x^2+2x}\,\mathrm{d}x \qquad (\text{令 } u=(x-1)^2)$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}\,\mathrm{d}(x-1)^2$$

$$=\frac{e}{6}\int_0^1 u\,e^{-u}\,\mathrm{d}u=-\frac{e}{6}(u+1)e^{-u}\Big|_0^1=\frac{1}{6}(e-2)$$

例10. 证明恒等式

$$\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\pi}{4} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$$

证: 令 $f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$

则 $f'(x) = 2x\sin x\cos x - 2x\sin x\cos x = 0$

因此 $f(x) = C \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$, 又

$$f(\tfrac{\pi}{4}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t + \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}\,t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (\arcsin\sqrt{t} + \arccos\sqrt{t}\,)\mathrm{d}\,t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$$

故所证等式成立 .

例11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调递减的连续函数，

试证明对于任何 $q\in[0,1]$ 都有不等式

$$\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x \geq q\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

证一： 显然 $q=0, q=1$ 时结论成立. 当 $0<q<1$ 时，

$$\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x - q\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=(1-q)\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x - q\int_q^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$ (用积分中值定理)

$$=(1-q)\cdot q\cdot f(\xi_1) - q\cdot(1-q)\cdot f(\xi_2)$$

$\xi_1\in[0,q]$

$\xi_2\in[q,1]$

$$=q(1-q)[f(\xi_1)-f(\xi_2)]\geq 0$$

故所给不等式成立 .

例11. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是单调递减的连续函数,

试证明对于任何 $q \in [0,1]$ 都有不等式

$$\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x \ge q\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

证二: 显然 $q=0, q=1$ 时结论成立. 当 $0<q<1$ 时,

令 $F(q)=\dfrac{1}{q}\displaystyle\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x,$

则 $F'(q)=\dfrac{f(q)q-\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x}{q^2} \le \dfrac{f(q)q-\int_0^q f(q)\,\mathrm{d}x}{q^2}=0$

所以 $F(q)\ge F(1)$, 故所给不等式成立.

例12. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，试证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\ge (b-a)^2 \qquad ①$$

证一： 设 $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}-(x-a)^2$

则 $F'(x)=f(x)\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}+\frac{1}{f(x)}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-2(x-a)$

$$=\int_a^x\left[\frac{f(x)}{f(t)}+\frac{f(t)}{f(x)}-2\right]\mathrm{d}t=\int_a^x\frac{[f(x)-f(t)]^2}{f(x)f(t)}\,\mathrm{d}t$$

≥ 0 $\qquad x>a,\ f(x)>0$

故 $F(x)$ 单调不减，$\therefore F(b)\ge F(a)=0$，即① 成立.

例12. 设 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(x)>0$，试证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \ge (b-a)^2 \qquad ①$$

证二: 令 $F(t)=\int_a^b [t\sqrt{f(x)}+\frac{1}{\sqrt{f(x)}}]^2\mathrm{d}x$

则 $F(t)=t^2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+2t(b-a)+\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$

显然二次函数 $F(t)\ge 0$，所以其判别式不大于**0**,

即得 $\Delta=4(b-a)^2-4\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\le 0$

于是① 成立.

作业 (总习题五)

P264　2. (1), (3)

4.

5. (1)

7.

9.