§5.4 反常积分

一、无穷限的反常积分

二、无界函数的反常积分

三、Γ−函数

一、无穷限的反常积分

❖无穷限的反常积分的定义

连续函数$f(x)$在区间$[a, +\infty)$上的反常积分定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\,.$$

在反常积分的定义式中, 如果极限是存在的, 则称此反常积分收敛, 否则称此反常积分发散.

类似地, 连续函数$f(x)$在区间$(-\infty, b]$上和在区间$(-\infty, +\infty)$的反常积分定义为

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx\,.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx\,.$$

一、无穷限的反常积分

❖无穷限的反常积分的定义

连续函数$f(x)$在区间$[a, +\infty)$上的反常积分定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\ .$$

•反常积分的计算

如果$F(x)$是$f(x)$的原函数, 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}[F(x)]_a^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)\ .$$

可采用如下简记形式:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)\ .$$

一、无穷限的反常积分

❖无穷限的反常积分的定义

连续函数$f(x)$在区间$[a, +\infty)$上的反常积分定义为

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx .$$

•反常积分的计算

如果$F(x)$是$f(x)$的原函数, 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a) .$$

类似地, 有

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x) ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x) .$$

例1 计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+13}$.

解 $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2-6x+13}$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{d(x-3)}{(x-3)^2+4}$$

$$=[\frac{1}{2}\arctan\frac{x-3}{2}]_1^{+\infty}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\arctan\frac{x-3}{2}-\frac{1}{2}\arctan(-1)$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{8}.$$

例2 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt$ (p 是常数，且 $p>0$).

解

$$\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = [\int te^{-pt}dt]_0^{+\infty} = [-\frac{1}{p}\int tde^{-pt}]_0^{+\infty}$$

$$= [-\frac{1}{p}te^{-pt} + \frac{1}{p}\int e^{-pt}dt]_0^{+\infty}$$

$$= [-\frac{1}{p}te^{-pt} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}]_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{t\to+\infty}[-\frac{1}{p}te^{-pt} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}] + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}\,.$$

提示：

$$\lim_{t\to+\infty} te^{-pt} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{pt}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{pe^{pt}} = 0\,.$$

例3 计算反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

解

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x(x^2+1)}dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

例4 讨论反常积分 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ (a>0)$的敛散性.

解 当 $p=1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\int_a^{+\infty}\frac{1}{x}dx=[\ln x]_a^{+\infty}=+\infty$.

当 $p<1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=[\frac{1}{1-p}x^{1-p}]_a^{+\infty}=+\infty$.

当 $p>1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=[\frac{1}{1-p}x^{1-p}]_a^{+\infty}=\frac{a^{1-p}}{p-1}$.

因此，当 $p>1$ 时，此反常积分收敛，其值为 $\frac{a^{1-p}}{p-1}$；

当$p\leq1$时, 此反常积分发散.

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = [F(x)]_{-\infty}^{b} = F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x).$$

例5 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{b} xe^{2x}dx.$

解 $$\int_{-\infty}^{b} xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{b} xde^{2x}$$

$$= [\frac{1}{2}xe^{2x}]_{-\infty}^{b} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{b} e^{2x}dx$$

$$= [\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}]_{-\infty}^{b}$$

$$= \frac{b}{2}e^{2b} - \frac{1}{4}e^{2b} - \lim_{x\to-\infty}[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}]$$

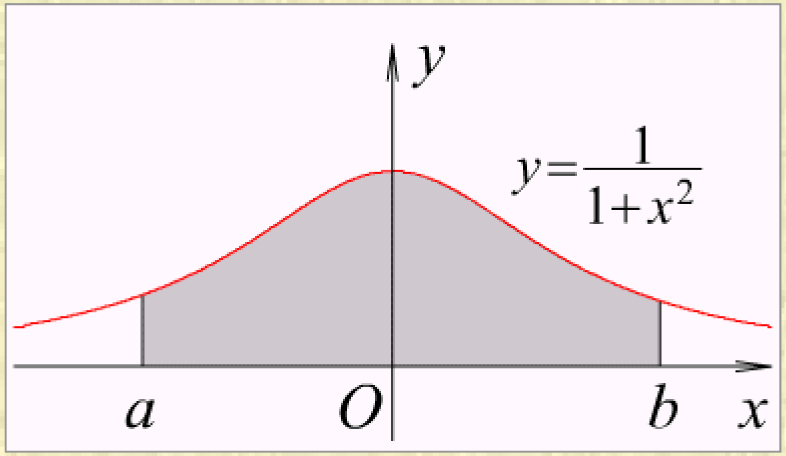
$$= \frac{b}{2}e^{2b} - \frac{1}{4}e^{2b}.$$

例6 计算反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

解 $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \arctan x - \lim_{x\to-\infty} \arctan x$$

$$= \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi .$$



二、无界函数的反常积分

❖无界函数反常积分的定义

设函数$f(x)$在区间$(a, b]$上连续，点a为$f(x)$的瑕点. 函数$f(x)$在$(a, b]$上的反常积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx\ .$$

在反常积分的定义式中, 如果极限是存在的, 则称此反常积分收敛; 否则称此反常积分发散.

注：

如果函数$f(x)$在点x_0的任一邻域内都无界，那么点x_0称为函数$f(x)$的**瑕点**(也称为无界间断点).

无界函数的反常积分又称为**瑕积分**.

二、无界函数的反常积分

❖无界函数反常积分的定义

设函数$f(x)$在区间$(a, b]$上连续，点a为$f(x)$的瑕点．函数$f(x)$在$(a, b]$上的反常积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx\ .$$

类似地，函数$f(x)$在$[a, b)$上(b为瑕点)的反常积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx\ .$$

函数$f(x)$在$[a, c)\cup(c, b]$上(c为瑕点)的反常积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)dx\ .$$

二、无界函数的反常积分

❖无界函数反常积分的定义

设函数$f(x)$在区间$(a, b]$上连续，点a为$f(x)$的瑕点．函数$f(x)$在$(a, b]$上的反常积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx\,.$$

•反常积分的计算

如果$F(x)$为$f(x)$的原函数，则$f(x)$在$(a, b]$上的反常积分为

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}[F(x)]_t^b$$

$$= F(b) - \lim_{t\to a^+}F(t) = F(b) - \lim_{x\to a^+}F(x)\,.$$

可采用简记形式：$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - \lim_{x\to a^+}F(x)\,.$

二、无界函数的反常积分

❖无界函数反常积分的定义

设函数$f(x)$在区间$(a, b]$上连续，点a为$f(x)$的瑕点．函数$f(x)$在$(a, b]$上的反常积分定义为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx\ .$$

•反常积分的计算

如果$F(x)$为$f(x)$的原函数，则$f(x)$在$(a, b]$上的反常积分为

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-\lim_{x\to a^+}F(x)\ .$$

提问：

$f(x)$在$[a, b)$上和在$[a, c)\cup(c, b]$上的反常积分如何计算？

如何判断反常积分的敛散性？

当 a 为瑕点时，$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - \lim\limits_{x\to a^+} F(x)$；

当 b 为瑕点时，$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = \lim\limits_{x\to b^-} F(x) - F(a)$.

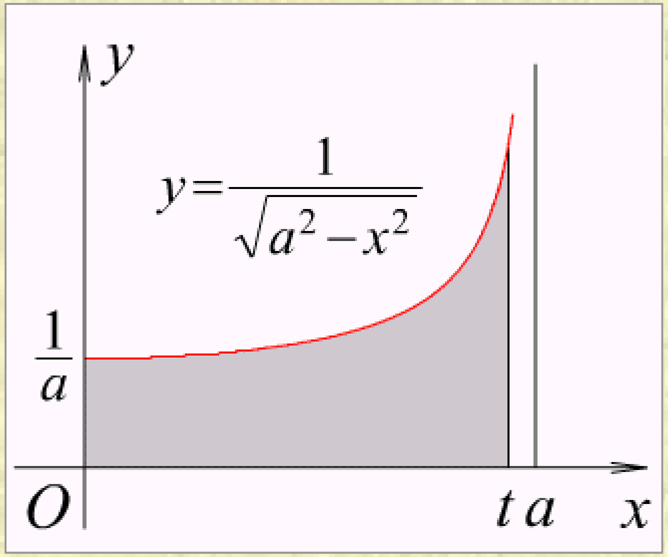
例7 计算反常积分 $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$，

所以点a为被积函数的瑕点.

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = [\arcsin\frac{x}{a}]_0^a$$

$$= \lim_{x\to a^-} \arcsin\frac{x}{a} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$



当 a 为瑕点时, $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$;

当 b 为瑕点时, $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)-F(a)$.

例8 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$.

解 点$x=0$为被积函数的瑕点.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$
$$=2\int_0^1 \frac{d\sqrt{x}}{x+1}$$
$$=[2\arctan\sqrt{x}]_0^1$$
$$=2\arctan 1-2\arctan 0=\frac{\pi}{2}.$$

当 a 为瑕点时, $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$;

当 b 为瑕点时, $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=\lim\limits_{x\to b^-}F(x)-F(a)$.

例9 计算反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

解 点$x=0$, $x=1$为被积函数的瑕点.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$$

$$=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=2\int_0^1 \frac{d\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

$$=[2\arcsin\sqrt{x}]_0^1$$

$$=2\arcsin 1-2\arcsin 0=\pi.$$

当c ($a<c<b$)为瑕点时,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=[\lim_{x\to c^-}F(x)-F(a)]+[F(b)-\lim_{x\to c^+}F(x)].$$

例10 讨论反常积分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$的收敛性.

解 在区间[−1, 1]上 $x=0$ 为函数$\frac{1}{x^2}$的瑕点.

由于$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx=[-\frac{1}{x}]_{-1}^{0}=\lim_{x\to 0^-}(-\frac{1}{x})-1=+\infty$,

即反常积分$\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx$发散,

所以反常积分$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$发散.

注 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}\neq[-\frac{1}{x}]_{-1}^{1}=-2$

三、Γ–函数

- Γ–函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{s-1}dx\ (s>0)$$

(1) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\ (s>0).$

$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma(n+1)=n!$

(2) $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2s-1}du.$

$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (见下册 90 页)

$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

作 业

习题5–4 (P256):

1.(3) (6) (8) (10)

3.