§5.1 定积分的概念与性质

一、定积分问题举例

二、定积分定义

三、定积分的性质

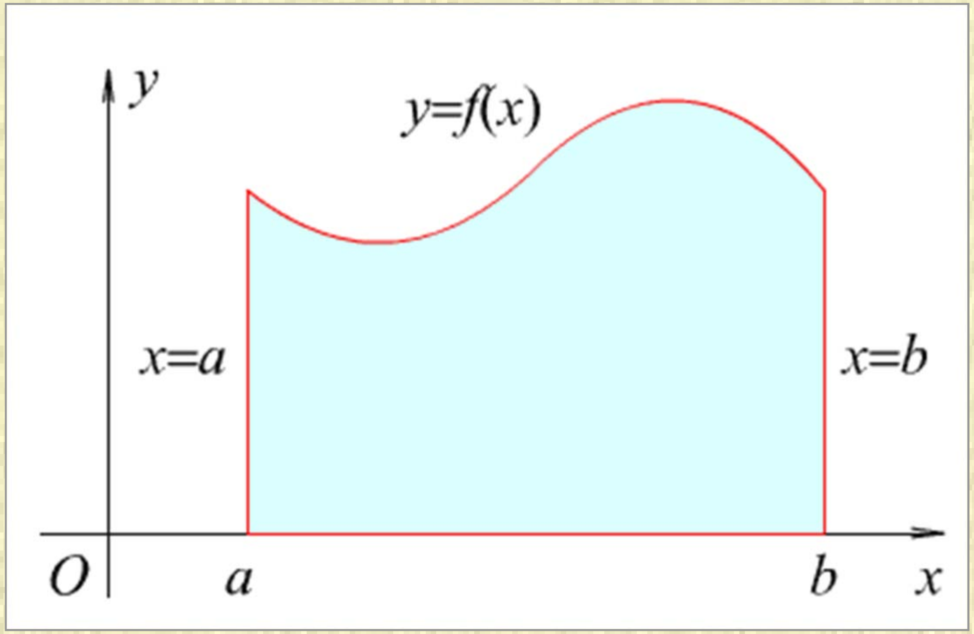
一、定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

•曲边梯形

设函数$y=f(x)$在区间$[a, b]$上非负、连续.

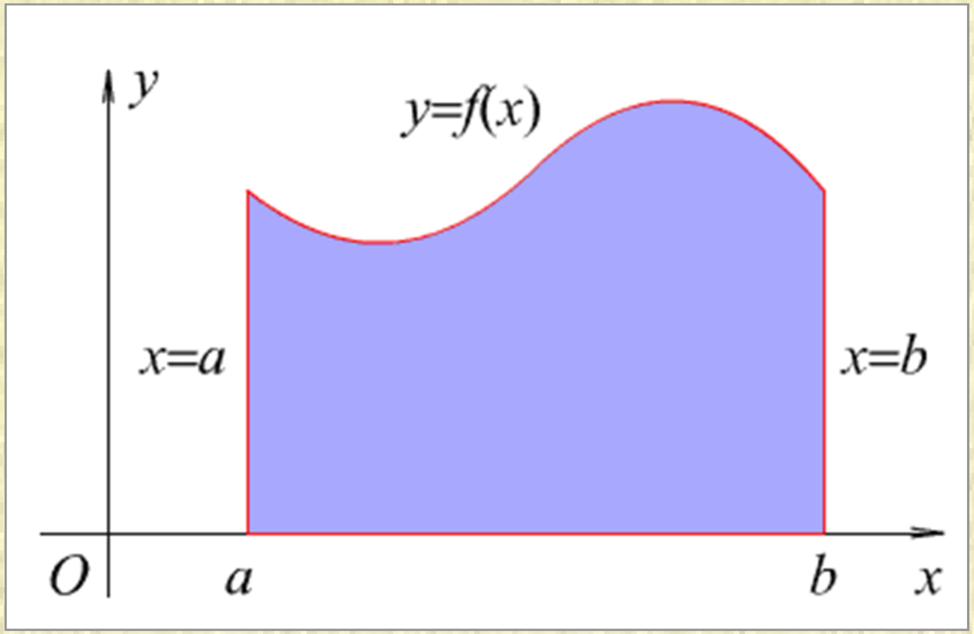
由直线$x=a$、$x=b$、$y=0$及曲线$y=f(x)$所围成的图形称为曲边梯形, 其中曲线弧称为曲边.



•观察与思考

在曲边梯形内摆满小的矩形，当小矩形的宽度减少时，小矩形面积之和与曲边梯形面积之间的误差将如何变化？

怎样求曲边梯形的面积？



•求曲边梯形的面积 以直代曲

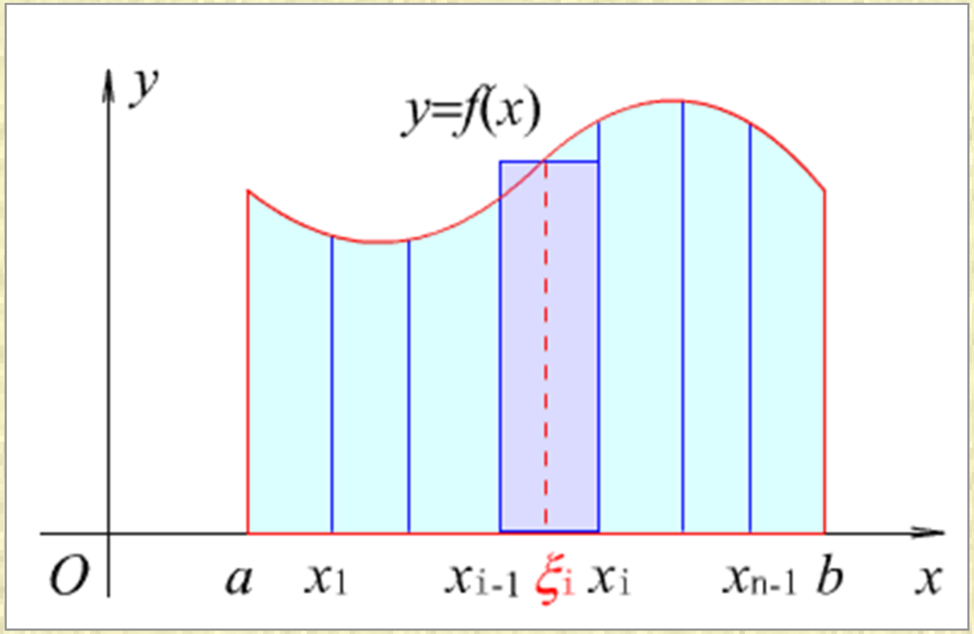
(1)分割: $a=x_0< x_1< x_2< \cdots < x_{n-1}< x_n=b$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$;

(2)近似代替: 小曲边梯形的面积近似为$f(\xi_i)\Delta x_i$ $(x_{i-1}<\xi_i<x_i)$;

(3)求和: 曲边梯形的面积近似为$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$;

(4)取极限: 设$\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2,\cdots, \Delta x_n\}$, 曲边梯形的面积为

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$



2. 变速直线运动的路程

以不变代变

已知物体直线运动的速度$v=v(t)$是时间 t 的连续函数，且$v(t)\geq 0$，计算物体在时间段$[T_1, T_2]$内所经过的路程S.

(1)分割：$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2$，$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$；

(2)近似代替：物体在时间段$[t_{i-1}, t_i]$内所经过的路程近似为

$$\Delta S_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i \ (t_{i-1}<\tau_i<t_i);$$

(3)求和：物体在时间段$[T_1, T_2]$内所经过的路程近似为

$$S\approx\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i\ ;$$

(4)取极限：记$\lambda=\max\{\Delta t_1, \Delta t_2,\cdots, \Delta t_n\}$，物体所经过的路程为

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i\ .$$

二、定积分定义

❖定积分的定义

设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上有界.

•在区间$[a, b]$内插入分点: $a=x_0<x_1<x_2< \cdots <x_{n-1}<x_n=b$;

记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1, 2,\cdots, n)$, $\lambda=\max\{\Delta x_1, \Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$;

•在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i $(i=1, 2,\cdots, n)$, 作和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$;

•如果当$\lambda\to 0$时，上述和式的极限存在，且极限值与区间$[a, b]$的分法和ξ_i的取法无关，则称此极限为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分, 记为$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

二、定积分定义

❖定积分的定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

•定积分各部分的名称

$\int$ ————积分符号，

$f(x)$ ————被积函数，

$f(x)dx$ ——被积表达式，

x ————积分变量，

a ————积分下限，

b ————积分上限，

$[a, b]$————积分区间，

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$————积分和.

二、定积分定义

❖定积分的定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

根据定积分的定义，曲边梯形的面积为 $A=\int_a^b f(x)dx$.

变速直线运动的路程为 $S=\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$.

说明:

定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du \ .$$

二、定积分定义

❖定积分的定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

❖函数的可积性

如果函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分存在，则称$f(x)$在区间$[a, b]$上可积.

•定理1

如果函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，则函数$f(x)$在区间$[a, b]$上可积.

•定理2

如果函数$f(x)$在区间$[a, b]$上有界，且只有有限个间断点，则函数$f(x)$在区间$[a, b]$上可积.

二、定积分定义

❖定积分的定义

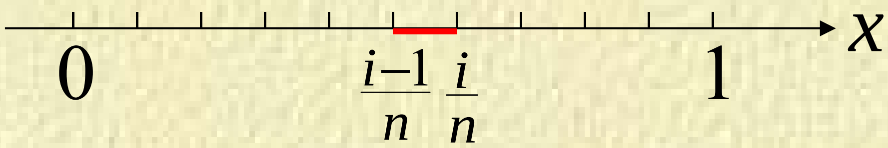
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

例1 用定积分表示极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$.

解

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\underbrace{\frac{i}{n}}_{\xi_i}}\cdot\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x_i}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$$



二、定积分定义

❖定积分的定义

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \ .$$

注：设$f(x)$在[0, 1]上连续，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\boxed{\frac{1}{n}}}_{\Delta x_i} f\big(\underbrace{\boxed{\frac{i}{n}}}_{\xi_i}\big) = \int_0^1 f(x)dx$$

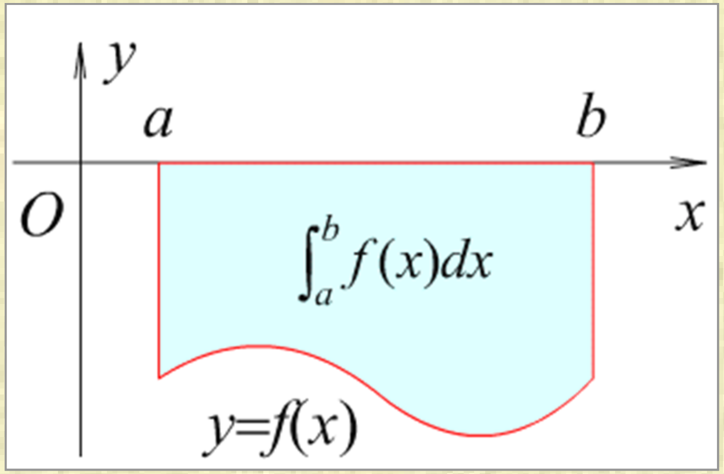
•定积分的几何意义

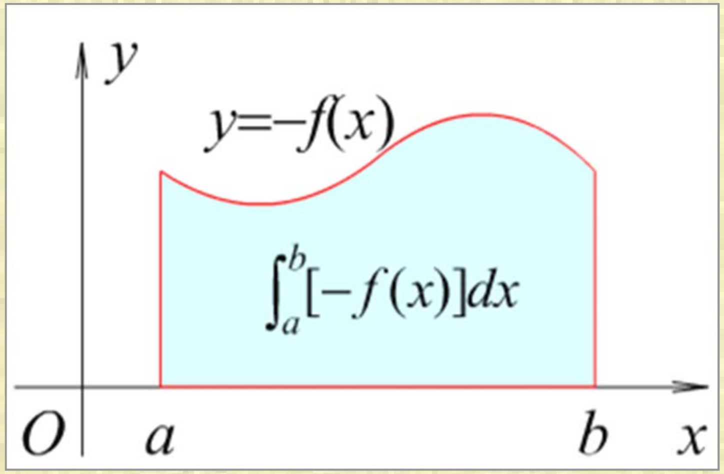
$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形面积

$f(x)<0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形面积的负值

这是因为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[-f(\xi_i)]\Delta x_i=-\int_a^b[-f(x)]dx\,.$$

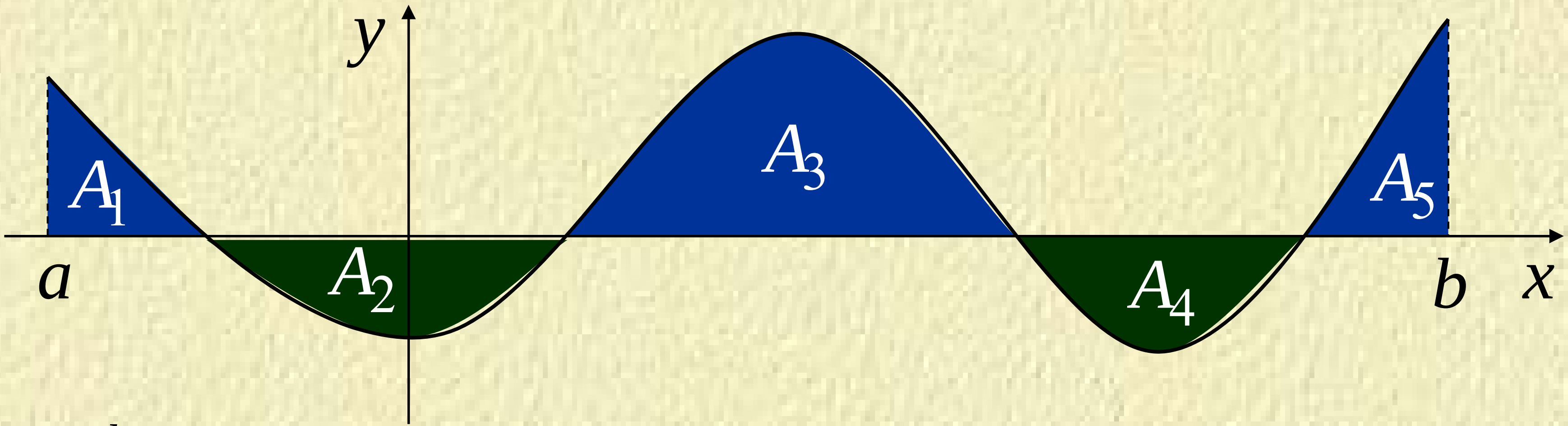




•定积分的几何意义

$f(x)>0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ 曲边梯形面积

$f(x)<0,\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A$ 曲边梯形面积的负值

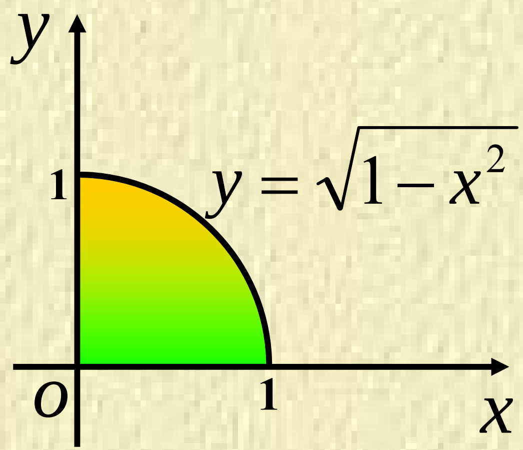


$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

各部分面积的代数和

例2 求 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

解 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$



例3 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}+\Lambda+\dfrac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}\right).$

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}+\Lambda+\dfrac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}+\dfrac{\sqrt{n^2-n^2}}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx}$$

$$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

三、定积分的性质

❖两点规定

(1)当 $a=b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=0$；

(2)当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

三、定积分的性质

- 性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

这是因为

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(\xi_i) \pm g(\xi_i)]\Delta x_i$$

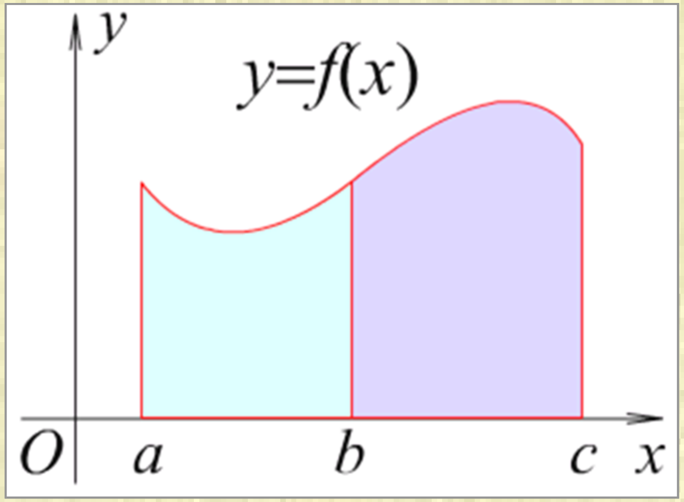
$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \text{ .}$$

三、定积分的性质

- 性质1 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.
- 性质2 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
- 性质3 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

注：值得注意的是不论a, b, c的相对位置如何上式总成立.



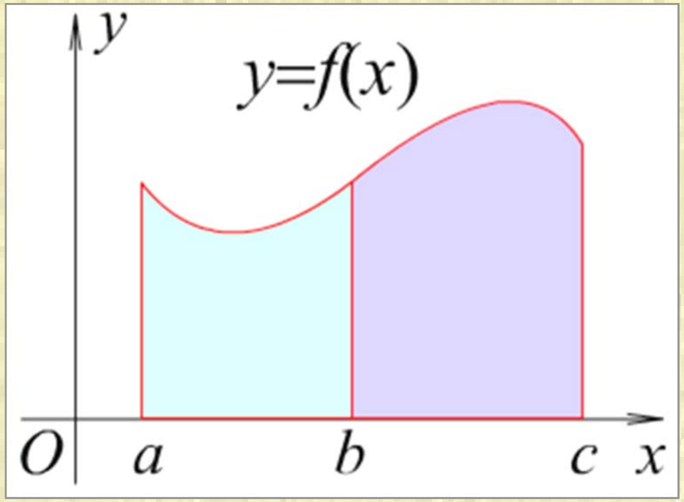
三、定积分的性质

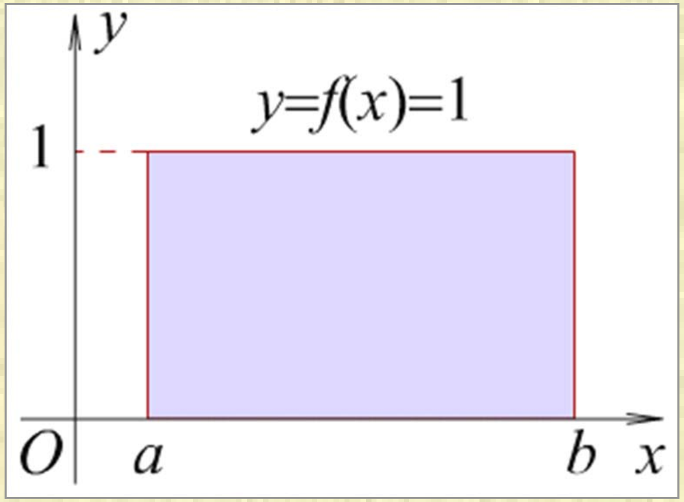
•性质1 $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

•性质2 $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

•性质3 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

•性质4 $\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b-a$.





•性质5 如果在区间$[a, b]$上$f(x)\geq 0$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0\ (a<b).$$

•推论1 如果在区间$[a, b]$上$f(x)\leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx\ (a<b).$$

这是因为$g(x)-f(x)\geq 0$, 从而

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [g(x)-f(x)]dx \geq 0,$$

所以 $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

•性质5 如果在区间$[a, b]$上$f(x)\geq 0$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \ (a<b).$$

•推论1 如果在区间$[a, b]$上$f(x)\leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \ (a<b).$$

•推论2 $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ (a<b).$

这是因为$-|f(x)|\leq f(x)\leq |f(x)|$，所以

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx\,,$$

即

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx\,.$$

•性质5 如果在区间$[a, b]$上$f(x)\geq 0$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0\ (a<b).$$

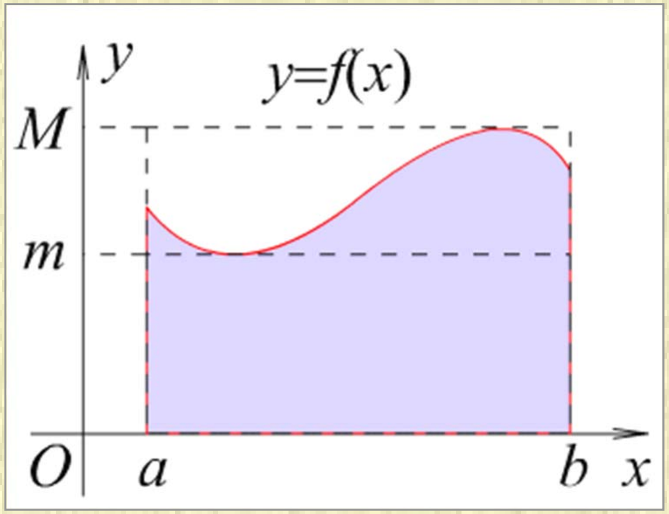
•推论1 如果在区间$[a, b]$上$f(x)\leq g(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx\ (a<b).$$

•推论2 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx\ (a<b).$

•性质6 设M及m分别是函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值及最小值, 则

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)\ (a<b).$$



例4　试证: $1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$.

证明　设 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 则在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上, 有

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}(x - \tan x) < 0$$

$$\therefore \quad f(\frac{\pi}{2}^-) < f(x) < f(0^+)$$

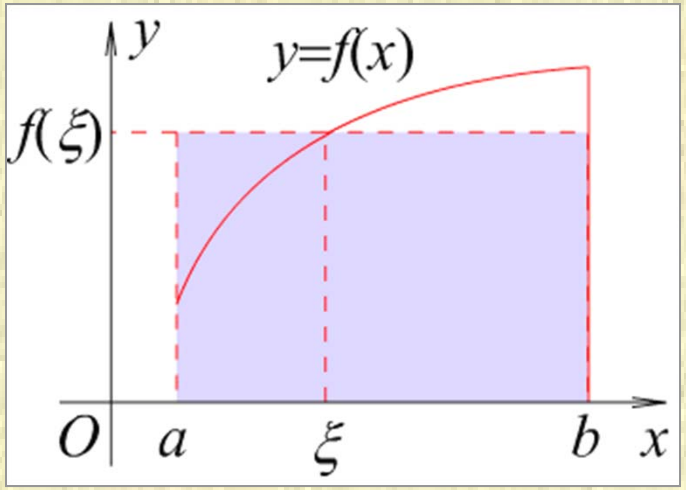
即 $$\frac{2}{\pi} < f(x) < 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

故 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \mathrm{d}x \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x$$

即 $$1 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x \le \frac{\pi}{2}$$

•性质7(定积分中值定理) 如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 则在积分区间$[a, b]$上至少存在一个点ξ, 使下式成立:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\ .}$$ ——积分中值公式.



这是因为, 由性质6

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\ ,$$

即
$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M\ ,$$

由介值定理, 至少存在一点$\xi \in [a, b]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\ ,$$

两端乘以$b-a$即得积分中值公式.

•性质7（定积分中值定理）如果函数$f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续，则在积分区间$[a, b]$上至少存在一个点ξ，使下式成立：

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)\ .}$$

——积分中值公式.

注：无论从几何上，还是从物理上，都容易理解

$f(\xi)$就是$f(x)$在区间$[a,b]$上的平均值.

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (a \le \xi \le b)$$

平均值公式

求连续变量的平均值要用到.

例5 计算从0 秒到T秒这段时间内自由落体的平均速度.

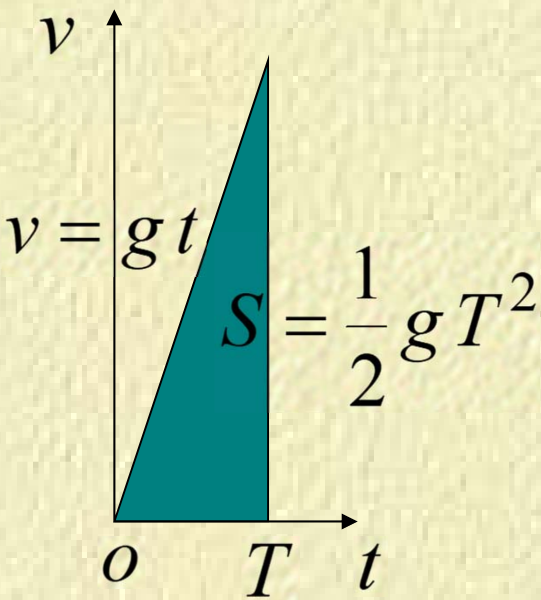
解 已知自由落体速度为

$$v = gt$$

故所求平均速度

$$\bar{v} = \frac{1}{T-0}\int_0^T gt\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\frac{1}{2}gT^2 = \frac{gT}{2}$$



例6 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{t}{t+1}\arctan t\,dt.$

解 $\int_x^{x+2}\frac{t}{t+1}\arctan t\,dt$

$$=\frac{\xi}{\xi+1}\arctan\xi\cdot(x+2-x)$$

$$=\frac{2\xi}{\xi+1}\arctan\xi,\quad(x\le\xi\le x+2)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+2}\frac{t}{t+1}\arctan t\,dt$$

$$=\lim_{\xi\to+\infty}\frac{2\xi}{\xi+1}\arctan\xi$$

$$=\pi.$$

作 业

习题5–1 (P233):

6.(1) (3)

8.(2) (4)