第四章 不定积分

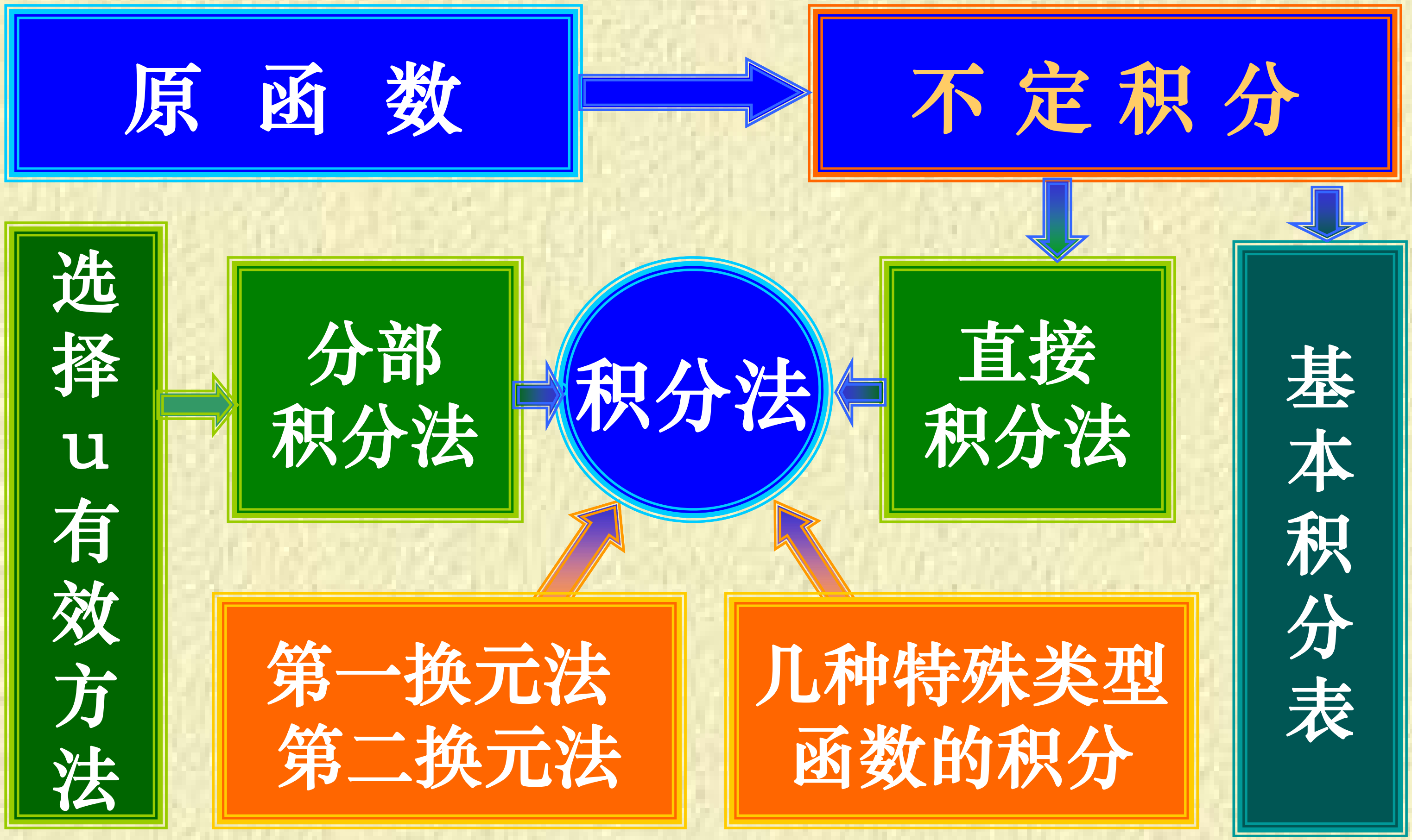
习题课

一、主要内容框图

二、不定积分计算小结

三、例题选解

一、主要内容框图


原 函 数
不 定 积 分
选择u有效方法
分部积分法
积分法
直接积分法
基本积分表
第一换元法
第二换元法
几种特殊类型函数的积分

二、不定积分计算小结

1. 补充公式(课本第203页)

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C;\qquad \int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C;$$

$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C;\qquad \int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;\qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;\qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

2. 分项法(积分的线性性质)

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1 \int f(x)\mathrm{d}x + k_2 \int g(x)\mathrm{d}x$$

化所给不定积分为常见的积分类型之和

复习题1 求 $\int \frac{x - \sin 2x}{1 + \cos 2x}\mathrm{d}x$.

观察与分析:

$(1 + \cos 2x)' = -2\sin 2x$

$$\frac{x - \sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{x}{1 + \cos 2x} - \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x},$$

$$\frac{x}{1 + \cos 2x} = \frac{x}{2\cos^2 x} = \frac{x}{2}(\tan x)'.$$

分部积分题型

3. 第一类换元法(凑微分法)

设 F 是 f 的一个原函数, $u=\varphi(x)$可导, 则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)$$

$$=F[\varphi(x)]+C$$

凑微分: $\varphi'(x)\mathrm{d}x=\mathrm{d}\varphi(x)$

换元: $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$

$\longrightarrow \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x)=F[\varphi(x)]+C$

关键点:如何确定中间变量 $u=\varphi(x)$?

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x), \quad u = \varphi(x) = ?$$

从被积函数中明显的复合部分去确定 u

复习题2 求下列不定积分:

1) $\displaystyle\int \frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x}\mathrm{d}x$;　　2) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{\sqrt{x\ln x}}\mathrm{d}x$.

观察与分析:

1) $u = \tan x$, $u' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

$$\frac{\ln\tan x}{\sin x\cos x} = \frac{\ln\tan x}{\tan x\cos^2 x} = \frac{\ln u}{u}\cdot u'.$$

2) $u = x\ln x$, $u' = 1 + \ln x$.

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x), \quad u=\varphi(x)=?$$

通过凑微分确定 u

复习题3 求下列不定积分:

1) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; 2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$.

观察与分析:

1) $\displaystyle\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\arctan x)$, $u=\arctan x$,

2) $u=1-x^4$, $u'=-4x^3$.

不合适

$$x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2), u=x^2, \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]\mathrm{d}\varphi(x), \quad u=\varphi(x)=?$$

常见的凑微分类型

1. $f(x^{n+1})x^n dx$;

2. $\dfrac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$;

3. $\dfrac{f(\ln x)}{x}dx$;

4. $f(\dfrac{1}{x})\dfrac{1}{x^2}dx$;

5. $f(\sin x)\cos x dx$;

6. $f(e^x)dx$;

7. $f(\tan x)\sec^2 x dx$;

8. $\dfrac{f(\arctan x)}{1+x^2}dx$.

4. 第二类换元法(积分变量代换法)

设f 连续, $x=\varphi(t)$单调可导, 则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

常用的变量代换:

1) 三角代换

$x = a\sin t$ 去根式 $\sqrt{a^2 - x^2}$

$x = a\tan t$ 去根式 $\sqrt{a^2 + x^2}$

$x = a\sec t$ 去根式 $\sqrt{x^2 - a^2}$

4. 第二类换元法(积分变量代换法)

设f 连续, $x=\varphi(t)$单调可导, 则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

常用的变量代换:

2）简单根式代换 $t=\sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$, $t=\sqrt{ae^{kx}+b}$.

3）倒代换 $x=\dfrac{1}{t}$

4）万能代换 $u=\tan\dfrac{x}{2}$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}du,\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

复习题4 求 $\int\sqrt{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x.$

解 令 $t=\sqrt{e^{2x}-1}$, $e^{2x}=t^2+1,$

$$x=\frac{1}{2}\ln(t^2+1),\quad \mathrm{d}x=\frac{t}{t^2+1}\mathrm{d}t.$$

$$\int\sqrt{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=\int(1-\frac{1}{t^2+1})\mathrm{d}t=t-\arctan t+C$$

$$=\sqrt{e^{2x}-1}-\arctan\sqrt{e^{2x}-1}+C.$$

复习题5 求 $\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x.$

分母次数较高，宜使用**倒代换.**

解 令 $x=\frac{1}{t}$, $\quad \mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^4+1}}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{1}{t^{-3}\sqrt{t^{-4}+1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int \frac{t^3}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t=-\frac{1}{4}\int \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}(t^4+1)$$

$$=-\frac{1}{2}\sqrt{1+t^4}+C=-\frac{\sqrt{x^4+1}}{2x^2}+C.$$

5. 分部积分法

分部积分公式: $\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$

分部积分基本题型:

1) $\int P(x)\sin(ax+b)\mathrm{d}x$, $\int P(x)\cos(ax+b)\mathrm{d}x$,

$\int P(x)e^{ax}\mathrm{d}x$ ……

取 $u = P(x)$

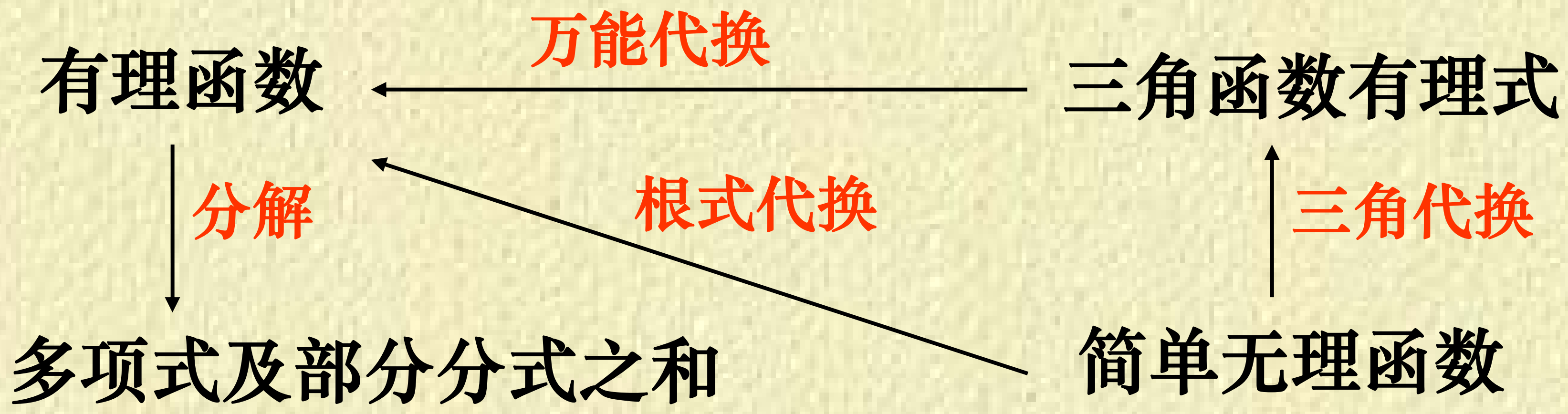
2) $\int x^n \ln P(x)\mathrm{d}x$, $\int x^n \arctan x\mathrm{d}x$ ……

取 $\mathrm{d}v = x^n\mathrm{d}x$

3) $\int e^{ax}\sin bx\mathrm{d}x, \int e^{ax}\cos bx\mathrm{d}x$, $\int \sec^3 x\mathrm{d}x$ ……

分部积分 "回归法"

6. 可积函数的特殊类型



特殊类型的积分按上述方法虽然可以积出，但不一定简便，**要注意综合使用基本积分法，简便计算.**

复习题6 求下列不定积分:

1) $\int \frac{x+1}{x^2-6x+5}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{4x-1}{x^2+4x+8}\mathrm{d}x$; 3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+1)}$.

解题要点:

1) $\frac{x+1}{x^2-6x+5}$

$(x^2-6x+5)' = 2x-6$

$$= \frac{x-3}{x^2-6x+5} + \frac{4}{x^2-6x+5}$$

$$= \frac{(x^2-6x+5)'}{2(x^2-6x+5)} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-1}.$$

复习题6 求下列不定积分:

1) $\int \frac{x+1}{x^2-6x+5}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{4x-1}{x^2+4x+8}\mathrm{d}x$; 3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+1)}$.

解题要点:

2) $\frac{4x-1}{x^2+4x+8}$

$(x^2+4x+8)' = 2x+4$

$$= \frac{4x+8}{x^2+4x+8} - \frac{9}{x^2+4x+8}$$

$$= \frac{2(x^2+4x+8)'}{x^2+4x+8} - \frac{9}{(x+2)^2+4}.$$

复习题6　求下列不定积分:

1) $\int \frac{x+1}{x^2-6x+5}\mathrm{d}x$; 2) $\int \frac{4x-1}{x^2+4x+8}\mathrm{d}x$; 3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^4+1)}$.

解题要点:

3) $$\frac{1}{x(x^4+1)} = \frac{(x^4+1)-x^4}{x(x^4+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x^3}{x^4+1};$$

$$\frac{1}{x(x^4+1)} = \frac{1}{x^5(1+x^{-4})}$$

$$= -\frac{1}{4(1+x^{-4})}\cdot(1+x^{-4})'$$

评注:

凑微分是计算积分的首要过程.

第一类换元法是复合求导的逆运算,是积出积分的重要一环.

第二类换元法是积分计算的一种技术(常用于去根式).

分部积分法是“乘积”求导的逆运算,是计算积分的一种过度性的主要手段,灵活多变,不容易掌握.

切记: 初等函数并不是都能“积得出”, 不常见的积分题,计算当中会出现“恰好”之处(见例7).

三、例题选解

例1 计算 $\int \frac{e^{2x}}{e^x+2}\mathrm{d}x.$

$$\int f(e^x)\mathrm{d}x \Rightarrow \int g(e^x)\mathrm{d}(e^x)$$

解 $\int \frac{e^{2x}}{e^x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{e^x}{e^x+2}\mathrm{d}e^x$

$= \int (1-\frac{2}{e^x+2})\mathrm{d}(e^x)$

$= e^x - \int \frac{2}{e^x+2}\mathrm{d}(e^x+2)$

$= e^x - 2\ln(e^x+2)+C.$

例2 计算 $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x.$

解法一

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}(1+\sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x)+C.$$

例2 计算 $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x.$

解法二

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}\sin 2x}{1+\frac{1}{2}(1-\cos 2x)} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{3-\cos 2x} \mathrm{d}(3-\cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(3-\cos 2x)+C.$$

例3 计算 $\int \sec x \tan^2 x \,dx.$

解法一 $\int \sec x \tan^2 x \,dx = \int \tan x \,d\sec x$

$$= \tan x \sec x - \int \sec^3 x \,dx$$

$$= \tan x \sec x - \int \sec x \cdot (1 + \tan^2 x)\,dx$$

$$= \tan x \sec x - \int \sec x \,dx - \int \sec x \tan^2 x \,dx$$

$$= \tan x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| - \int \sec x \tan^2 x \,dx$$

$$\int \sec x \tan^2 x \,dx$$

$$= \frac{1}{2}(\tan x \sec x - \ln|\sec x + \tan x|) + C.$$

例3 计算 $\int \sec x \tan^2 x \, dx.$

解法二 $\int \sec x \tan^2 x \, dx$

$$= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$$

$$= -\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} d\cos x$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin x \, d\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos x} dx$$

$$= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C.$$

例4 计算 $\int \frac{\arctan x}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{\arctan x}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{\arctan x}{x^2} - \frac{\arctan x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$= -\int \arctan x\,\mathrm{d}(\arctan x) - \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)$

$= -\frac{1}{2}(\arctan x)^2 - \frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2}(\arctan x)^2 - \frac{\arctan x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$

$= -\frac{1}{2}(\arctan x)^2 - \frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

例5 计算 $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$

$= \int \ln \cos x \, \mathrm{d}(\tan x)$

$= \tan x \ln \cos x - \int \tan x \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) \mathrm{d}x$

$= \tan x \ln \cos x + \int \tan^2 x \, \mathrm{d}x$

$= \tan x \ln \cos x + \int (\sec^2 x - 1) \mathrm{d}x$

$= \tan x \ln \cos x + \tan x - x + C.$

例6 计算 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx.$

$$d\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

解 $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}d(1+x^2)$$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

例7 求 $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx.$

解 $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx = -\int x^2 e^x d\frac{1}{x+2}$

$$= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int \frac{1}{x+2}(2xe^x + x^2 e^x) dx$$

$$= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + \int xe^x dx$$

恰好之处

$$= -\frac{x^2 e^x}{x+2} + xe^x - e^x + C$$

$$= \frac{(x-2)e^x}{x+2} + C.$$

评注: 分部积分法灵活多变,不容易掌握. 多练!

例8 计算 $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$

解　令 $x=\tan t,$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{1}{\sec^4 t}\cdot \sec^2 t\,\mathrm{d}t=\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}+C$$

$$=\frac{t}{2}+\frac{\tan t\cos^2 t}{2}+C=\frac{\arctan x}{2}+\frac{x}{2(x^2+1)}+C.$$

例9 求 $\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x.$

解法一 令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $x=2\arctan u$,

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u,\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int \frac{2}{(1+u)^2}\mathrm{d}u=-\frac{2}{1+u}+C=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C.$$

例9 求 $\int \frac{1}{1+\sin x} dx.$

解法二 $\int \frac{1}{1+\sin x} dx$

$$= \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \sec x \tan x \, dx$$

$$= \tan x - \sec x + C.$$

类似题目: $\int \frac{1}{1-\sin x} dx, \int \frac{1}{1 \pm \cos x} dx, \int \frac{\sin x}{1 \pm \sin x} dx, \int \frac{\cos x}{1 \pm \cos x} dx.$

例10 求 $\int \frac{\cos x + 1}{3 + \sin^2 x}\mathrm{d}x.$

解

$$\int \frac{\cos x + 1}{3 + \sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\cos x}{3 + \sin^2 x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{3 + \sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{1}{4\sin^2 x + 3\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{3 + \sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x) + \int \frac{1}{(4\tan^2 x + 3)\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2\tan x)^2 + 3}\mathrm{d}(2\tan x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sin x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan x}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

例11 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$

解法一　令 $x = a\sin t$.(课本第199页, 例21)

解法二　$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\mathrm{d}x - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}] + C.$$

评注: 第二类换元法去根式,使运算变得明晰.

例12 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x.$

解 令 $t=\sqrt{e^x-1}$, 则 $x=\ln(t^2+1)$, $\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$,

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}\mathrm{d}x=\int \frac{\ln(t^2+1)\cdot(t^2+1)}{t}\cdot\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=\int 2\ln(t^2+1)\mathrm{d}t=2t\ln(t^2+1)-\int 2t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

$$=2t\ln(t^2+1)-4\int(1-\frac{1}{t^2+1})\mathrm{d}t$$

$$=2t\ln(t^2+1)-4t+4\arctan t+C$$

$$=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C.$$

评注: 第二类换元法去根式,使运算变得明晰.

从被积函数中复杂的部分去确定 u

思考题1 计算 $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x \cdot (1 + e^x \cos x)} dx.$

解 $u = e^x \cos x,\ u' = e^x(\cos x - \sin x),$

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x(1 + e^x \cos x)} dx$$

$$= \int \frac{u'}{u(1+u)} dx = \int \frac{1}{u(1+u)} du$$

$$= \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \ln|u| - \ln|1+u| + C$$

$$= \ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x \cos x}{1 + e^x \cos x}\right| + C.$$

思考题2 计算 $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x.$

解 $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=\int xe^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x-\int\frac{e^{\sin x}\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\int x\mathrm{d}(e^{\sin x})-\int e^{\sin x}\mathrm{d}(\frac{1}{\cos x})$$

$$=xe^{\sin x}-\int e^{\sin x}\mathrm{d}x-\frac{e^{\sin x}}{\cos x}+\int\frac{1}{\cos x}\cdot(e^{\sin x}\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=(x-\sec x)e^{\sin x}+C.$$

思考题3 计算 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx.$

解 $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}dx = \int \frac{(1-x)+(x-\ln x)}{(x-\ln x)^2}dx$

$= \int \frac{1-x}{(x-\ln x)^2}dx + \int \frac{1}{x-\ln x}dx$

$= \int \frac{1-x}{(x-\ln x)^2}dx + \frac{x}{x-\ln x} - \int x d(\frac{1}{x-\ln x})$

$= \int \frac{1-x}{(x-\ln x)^2}dx + \frac{x}{x-\ln x} - \int x \cdot [-\frac{1}{(x-\ln x)^2}] \cdot (1-\frac{1}{x})dx$

$= \frac{x}{x-\ln x} + C.$

作业 计算下列不定积分:

1. $\int \frac{1}{x^2}\tan(1-\frac{1}{x})\mathrm{d}x$;

2. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

3. $\int \frac{1}{e^x(1+e^{2x})}\mathrm{d}x$;

4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$;

6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}$;

7. $\int 3x^2 \arctan x\,\mathrm{d}x$;

8. $\int \frac{\ln(x^2+1)}{x^3}\mathrm{d}x$;

9. $\int \cos\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$;

10. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+2)}\mathrm{d}x$.