§4.1 不定积分的概念与性质

一、原函数与不定积分的概念

二、基本积分表

三、不定积分的性质

一、原函数与不定积分的概念

❖原函数

在区间 I 内, 如果 $F'(x)=f(x)$, 那么称 $F(x)$为 $f(x)$ 在区间 I 内**的原函数**.

例1 当 $0<x<1$时, 验证 $2\arcsin\sqrt{x}$, $\arcsin(2x-1)$ 都是 $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的原函数.

验证 $$(2\arcsin\sqrt{x})'=\frac{2}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$[\arcsin(2x-1)]'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$$

一、原函数与不定积分的概念

❖原函数

在区间 I 内, 如果 $F'(x)=f(x)$, 那么称 $F(x)$为 $f(x)$ 在区间 I 内**的原函数**.

例1 当$0<x<1$时, 验证 $2\arcsin\sqrt{x}$, $\arcsin(2x-1)$ 都是 $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$的原函数.

问题：(1) 原函数是否唯一?

(2) 若不唯一它们之间有什么联系?

❖定理

设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数, 则$G(x)$是$f(x)$的原函数, 当且仅当 $G(x)=F(x)+C.$

证明 充分性显然.

必要性:

$$\Theta \quad [G(x)-F(x)]'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0,$$

$$\therefore \quad G(x)-F(x)=C. \qquad (\,C\text{为任意常数})$$

问题： (1) 原函数是否唯一?

(2) 若不唯一它们之间有什么联系?

❖不定积分

设$F(x)$是$f(x)$的任一原函数，则$f(x)$的全部原函数的一般表达式 $F(x)+C$ 称为 $f(x)$的不定积分. 记作

$$\int f(x)dx = F(x)+C .$$

不定积分中各部分的名称：

$\int$ ------ 积分号,

$f(x)$ ------ 被积函数,

$f(x)dx$ ------ 被积表达式,

x ------ 积分变量,

C ------ 积分常数.

如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，则$\int f(x)dx = F(x) + C$.

1. 被积函数是原函数的导数，被积表达式是原函数的微分.

2. 不定积分表示那些导数等于被积函数的所有函数．或说其微分等于被积表达式的所有函数．因此*绝不能漏写积分常数C.*

3. 求已知函数的原函数或不定积分的运算称为积分运算，它是微分运算的逆运算.

例2 求$\int x^5 \mathrm{d}x.$

解 $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$ $\quad\therefore \int x^5 \mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C$

例3 求$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

解 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$$\therefore \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

例4　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

解　当 $x>0$ 时, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C\ (x>0);$$

当 $x<0$ 时, $[\ln(-x)]'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x}$,

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln(-x)+C\ (x<0).$$

合并上面两式, 得到

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C\ (x\neq 0).$$

例5 设$\int f(x)dx = \dfrac{x}{x-\ln x} + C$, 求$f(x)$.

解 $$f(x) = \left(\frac{x}{x-\ln x}\right)'$$

$$= \frac{(x-\ln x) - x(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2}$$

$$= \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}.$$

例6 已知物体运动速度 $v = at + v_0$，求路程函数.

解 $v = \dfrac{ds}{dt} = at + v_0$，所以

$$s = \int (at + v_0)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C$$

其中C为任意常数.

若$t = 0$时，$s = 0$，则$C = 0$，

路程函数为

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t.$$

例7　设曲线通过点(1, 2)，且其上任一点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线方程.

解　　设曲线方程为 $y = f(x)$,

根据题意知　$\frac{dy}{dx} = 2x$,

即 $f(x)$ 是 $2x$ 的一个原函数.

$\because \int 2xdx = x^2 + C$, 　$\therefore f(x) = x^2 + C$,

由曲线通过点(1, 2)　$\Rightarrow C = 1$,

所求曲线方程为　$y = x^2 + 1$.

•积分曲线

函数$f(x)$的原函数的图形称为$f(x)$的积分曲线.

显然,求不定积分得到一积分曲线族.

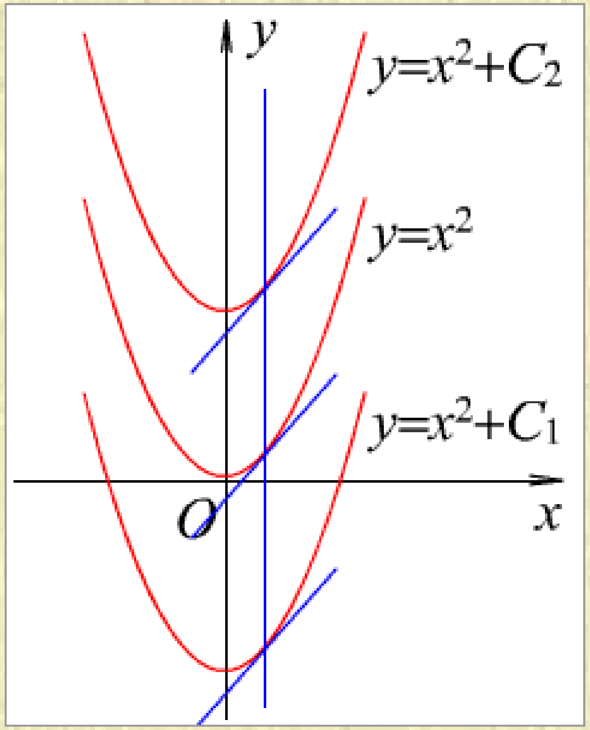
哪些函数有原函数?

又如何求其原函数?

❖原函数存在定理

连续函数一定有原函数.

原函数是否必为连续函数?



$2x$的积分曲线

二、基本积分表

实例 $\left(\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}\right)' = x^{\mu}$

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$

启示 能否根据求导公式得出积分公式?

结论 积分运算和微分运算是互逆的，

求导公式 $\Rightarrow$ 积分公式.

要判断一个不定积分公式是否正确, 只要将右端的函数求导, 看是否等于被积函数.

二、基本积分表

(1) $\int k dx = kx + C$ (k 是常数),

(2) $\int x^{\mu} dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C$,

(3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$,

(4) $\int e^{x} dx = e^{x} + C$,

(5) $\int a^{x} dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$,

(6) $\int \cos x dx = \sin x + C$,

(7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

(8) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$,

(9) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$,

(10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$,

(11) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$,

(12) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$,

(13) $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$,

(14) $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$,

(15) $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$.

例8 求积分 $\int x^2\sqrt{x}dx.$

$$\int x^{\mu}dx=\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+C$$

解 $\int x^2\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1}+C=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C.$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C.$$

$$\int\frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C.$$

三、不定积分的性质

❖性质1 $\int F'(x)dx = F(x)+C,\quad \int dF(x) = F(x)+C,$

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x),\quad d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx.$$

结论：如果不计任意常数，则微分运算与求不定积分的运算是互逆的.

❖性质2 $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

这是因为，

$$\left[\int f(x)dx+\int g(x)dx\right]' = \left[\int f(x)dx\right]' + \left[\int g(x)dx\right]' = f(x)+g(x).$$

❖性质3 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k 是常数，$k \neq 0$).

$\boxed{\text{思考：} k = 0\text{，等式是否成立？}}$

性质2，3称为线性性质.

❖直接积分法

利用不定积分的性质和基本积分公式,

可求出一些简单函数的不定积分.

例9 求积分 $\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

解

$$\int\left(\frac{3}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$

$$=3\int\frac{1}{1+x^2}dx-2\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=3\arctan x-2\arcsin x+C$$

例10 $\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{x^4-1+1}{1+x^2}dx$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)+1}{1+x^2}dx$$

$$= \int (x^2-1+\frac{1}{1+x^2})dx$$

$$= \int x^2dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x + C\,.$$

分项积分法

例11 $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)dx$

$$= \int \sec^2 x dx - \int dx$$

$$= \tan x - x + C.$$

例12 $\int \sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)dx$$

$$=\frac{1}{2}(x-\sin x)+C\,.$$

分项积分法

例13 $\int\frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$

$$=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$=\tan x-\cot x+C.$$

思考题 求$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x$

解 $$e^{|x|}=\begin{cases} e^{x}, & x\ge 0 \\ e^{-x}, & x<0 \end{cases}$$

$$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases} e^{x}+C_1, & x\ge 0 \\ -e^{-x}+C_2, & x<0 \end{cases}$$

由于这个分段函数在$(-\infty,+\infty)$上连续，所以原函数存在. 而原函数在$x=0$处连续，于是有

$$-1+C_2=1+C_1 \quad \Rightarrow C_2=2+C_1$$

故 $$\int e^{|x|}\,\mathrm{d}x=\begin{cases} e^{x}+C_1, & x\ge 0 \\ -e^{-x}+C_1+2, & x<0 \end{cases}$$

作 业

习题4–1 (P190):

1. (5)   (13) (15) (20) (21)
   (22) (23) (24) (25) (26)
2.
3.