极限计算小结

1. 主要结论

1） 初等函数 $f(x)$ 在定义区间内处处连续.

2） 变量代换：设 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=b$（$g(x)\neq b$），$\lim\limits_{u\to b} f(u)=A$，则

$$\lim_{x\to a} f[g(x)]=\lim_{u\to b} f(u)=A$$

3） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ 的充要条件为：$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$.

4） $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ 的充要条件为：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$.

5） 极限的四则运算.

6） “$\dfrac{0}{0}$”，“$\dfrac{\infty}{\infty}$” 型洛必达法则.

2. 洛必达法则是计算极限的有效方法

例 1. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

例 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = (\quad)$.

A. -1　　B. 不存在　　C. 0　　D. 1

分析以下错误运算:

例 3. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}$.

练习题. 计算下列极限:

1) ;

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x-\sin x}$$

3) ;

4) .

3. 极限计算中无穷小的处理

在乘除运算中，极限值不为 0 的因子先算出，"0 因子" 作等价无穷小代换，"0 根式" 有理化.

例 4. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{1-\sqrt{1-\sin^2 x}}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{1-\sqrt{1-\sin^2 x}}$ （$x=0$ 代入, 此式为 "$\dfrac{0}{0}$" 型）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{\sin^2 x}\cdot(1+\sqrt{1+\sin^2 x})$ （"0根式" 有理化）

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-\cos x}{x^2}$ （乘除运算中 "非0因子" 先算出，"0因子" 作等价无穷小代换 ）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x+\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x+\cos x}{1}=2$ （洛必达法则）

4. 极限计算中无穷大的处理

1）“$\infty-\infty$根式”有理化.

2）“三角无穷大”要先变.

3） 求$x\to\infty$时的极限，分子，分母同时除以分子,分母中的最高次幂(抓大头方法中的“大头”).

所谓“抓大头”就是抓住关于x的最高次的项,而把其余的项略掉. 如

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+\Lambda+a_1x+a_0}{b_mx^m+\Lambda+b_1x+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

注: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ (n为正数), 当$x\to+\infty$时,

可认为e^x为x的无穷大次幂，$\ln x$为x的0次幂.

例 5. 计算下列极限:

1) ;

2) ;

3) ;

4) .

5. $\lim u^v$（“$1^\infty, \infty^0, 0^0$”型）极限计算法

$$\boxed{\ln(\lim u^v) = \lim v \ln u}$$

其中的“1^∞”型，也可用配 e 法：

设 $\lim u(x) = 0$，$\lim v(x) = \infty$，则

$$\boxed{\lim(1+u)^v = \lim[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{uv} = e^{\lim uv}}$$

例 6. 计算下列极限：

1) ；　　2) ；

3) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x \sin x}}$

例 6. 计算下列极限:

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解: $\ln\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot(-\frac{1}{1+x^2})\cdot x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\cdot(1+x^2)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}=\frac{1}{e}$$

6. 利用导数定义式计算极限

例 7. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(x)>0$，求

$$\lim_{n\to\infty}[f(a+\frac{1}{n})/f(a)]^n.$$

解: $\ln\lim_{n\to\infty}[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}]^n=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}$

$$=\lim_{n\to\infty}n\ln[1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}]=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{\frac{1}{n}}=\frac{f'(a)}{f(a)},$$ **原式** $=\exp[\frac{f'(a)}{f(a)}].$

6. 利用导数定义式计算极限

例 8. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数，求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}.$$

解题提示：先用一次洛必达法则.

注意：因二阶导数 $f''(x)$ 在点 x_0 处连续性不知, 不可再次用洛必达法则.

6. 利用导数定义式计算极限

例 8. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处有二阶导数，求极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}.$$

解： $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]$$

$$=f''(x_0)$$

7. 利用麦克劳林公式计算极限

例 9. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$.

解:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt[3]{1+\frac{3}{x}}-\sqrt[4]{1-\frac{2}{x}})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x[1+\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})-(1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x[\frac{3}{2x}+o(\frac{1}{x})]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\frac{3}{2}+\boxed{o(1)}]=\frac{3}{2}$$

无穷小

$$\lim_{x\to+\infty}xo(\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{o(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=0$$

8. 利用中值定理计算极限

例10. 计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]$.

解:

$$\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x$$

$$=\frac{1}{\arctan\xi}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\qquad(x<\xi<x+1)$$

$$x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]=\boxed{\frac{1}{\arctan\xi}}\cdot\frac{x^2}{1+\xi^2}$$

$$\frac{1}{\arctan\xi}\to\frac{2}{\pi}$$

$$1\leftarrow\frac{x^2}{1+(x+1)^2}<\frac{x^2}{1+\xi^2}<\frac{x^2}{1+x^2}\to 1\quad(\text{当}x\to\infty\text{时})$$

由夹逼法得

$$\lim_{x\to+\infty}x^2[\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x]=\frac{2}{\pi}$$

9. 数列的极限

1） 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, 则对任一数列 $x_n \to a\ (x_n \neq a)$, 有

$$f(x_n)\to A.$$

2） 夹逼法.

3） 积分法：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

例11. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$.

例12. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\Lambda+\frac{n}{(n+n)^2}].$

解一： **记** $x_n=\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\Lambda+\frac{n}{(n+n)^2},$

$$y_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\frac{n}{(n+2)(n+3)}+\Lambda+\frac{n}{2n(2n+1)},$$

$$z_n=\frac{n}{n(n+1)}+\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\Lambda+\frac{n}{(2n-1)\cdot 2n},$$

则 $y_n<x_n<z_n$, **且有**

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}n(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{2},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\Lambda+\frac{n}{(n+n)^2}]=\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

例12. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\Lambda+\frac{n}{(n+n)^2}]$.

解二：$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\Lambda+\frac{n}{(n+n)^2}]$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1+\frac{i}{n})^2}$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{(1+x)^2}$$

$$=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{i}{n})=\int_0^1 f(x)dx$$

思考题1. **求极限** $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1\right)$.

提示: $\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1=\frac{\sqrt{n^2+i}-n}{n}=\frac{i}{n(\sqrt{n^2+i}+n)}$

$$\frac{i}{n(\sqrt{n^2+n}+n)}\le\frac{i}{n(\sqrt{n^2+i}+n)}<\frac{i}{2n^2}$$

思考题2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]^{\frac{1}{n}}$.

解: $\ln\lim\limits_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n})]^{\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\ln(1+\frac{i}{n})=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$=[(x+1)\ln(1+x)-x]_0^1=2\ln 2-1$$

原式$=\frac{4}{e}$