第三章 微分中值定理与导数的应用

习题课

一、主要内容框图

二、典型例题

一、主要内容框图

洛必达法则

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

令 $y = f^g$

取对数

$0 \cdot \infty$ 型

$f \cdot g = \dfrac{f}{1/g}$

$\infty - \infty$ 型

$f - g = \dfrac{1/g - 1/f}{1/g \cdot 1/f}$

$\dfrac{0}{0}$ 型

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

Cauchy 中值定理

$F(x) = x$

Lagrange 中值定理

$f(a) = f(b)$

Rolle 定理

$n = 0$

Taylor 中值定理

常用的泰勒公式

导数的应用

单调性,极值与最值,
凹凸性,拐点,
函数图形的描绘;
曲率;求根方法.

二、典型例题

例1 设 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2e^{\frac{1}{x^2}}}=0,$$

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

例2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

解法一

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{(1+5x)^{-\frac{4}{5}}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{-4(1+5x)^{-\frac{9}{5}}}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

例2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

解法二 分子关于 x 的次数为 2.

$$\sqrt[5]{1+5x}=(1+5x)^{\frac{1}{5}}$$

$$=1+\frac{1}{5}(5x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}-1\right)\cdot(5x)^2+o(x^2)$$

$$=1+x-2x^2+o(x^2)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{[1+x-2x^2+o(x^2)]-(1+x)}=-\frac{1}{2}.$$

$$(1+x)^m=1+mx+\Lambda+\frac{m(m-1)\Lambda\,(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

例3 设 $x^3-3xy+y^3=3$ 确定 y 是 x 的隐函数，求 $y=y(x)$ 的驻点，并判别它们是否为极值点.

解 方程两边对 x 求导得

$$3x^2-3y-3xy'+3y^2y'=0$$

令 $y'=0$，得 $y=x^2$，代入原方程得

$$-2x^3+x^6=3$$

解得驻点 $x=-1\ (y=1)$ 和 $x=\sqrt[3]{3}\ (y=\sqrt[3]{9})$.

$$2x-2y'-xy''+2y(y')^2+y^2y''=0$$

$x=-1, y=1, y'=0$ 代入得，$y''(-1)=1>0.$

$x=\sqrt[3]{3}, y=\sqrt[3]{9}, y'=0$ 代入得，$y''(\sqrt[3]{3})=-1<0.$

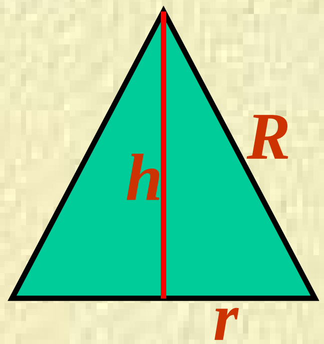
所以 $x=-1$ 为极小值点，$x=\sqrt[3]{3}$ 为极大值点.

例4 从一块半径为 R 的圆形铁皮上，剪下一块圆心角为 α 的圆扇形，用剪下的铁皮做一个圆锥形漏斗，设圆锥形漏斗的高为 h. 问 h 为多大时，漏斗的容积 V 最大？ 此时圆心角 α 为多大？

解 设圆锥底圆半径为 r，则有

$$r^2+h^2=R^2,\ V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{\pi}{3}(R^2h-h^3),\ (0<h<R)$$

$$\frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{3}(R^2-3h^2),$$



令 $\dfrac{dV}{dh}=0$，得唯一驻点 $h_0=\dfrac{\sqrt{3}}{3}R$，

此时漏斗的容积 V 最大.

所求圆心角 $\alpha=\dfrac{2\pi r_0}{R}=\dfrac{2\pi\sqrt{R^2-h_0^2}}{R}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi.$

例5 证明 $f(x)=(1+\frac{1}{x})^x$ 在 $(0,+\infty)$上单调增加.

证 $\ln f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x})$

$$=x\,[\,\ln(1+x)-\ln x\,]$$

$$\therefore\quad f'(x)=(1+\frac{1}{x})^x\underline{[\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x}]}$$

令 $F(t)=\ln t$, 在 $[\,x\,,\,x+1\,]$上利用拉氏中值定理, 得

$$\ln(1+x)-\ln x=\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}\quad(0<x<\xi<x+1)$$

故当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,从而 $f(x)$在 $(0,+\infty)$ 上单调增.

利用函数的单调区间和极值确定方程根的个数

例6 若曲线 $y=x^3+3x^2-4x-12$ 和直线 $y=5x+b$ 有三个不同的交点，求 b 值的范围.

分析 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有 n 个交点，也就是方程 $f(x)=g(x)$ 有 n 个根.

解 设 $f(x)=x^3+3x^2-9x-12$,

$f'(x)=3x^2+6x-9$,

得驻点 $x_1=-3$, $x_2=1$.

当 $x<-3$ 时，$f'(x)>0$,

$f(x)$在 $(-\infty,-3]$上单调增加,

值域为 $(-\infty,15]$;

当 $-3<x<1$ 时，$f'(x)<0$,

$f(x)$在 $[-3,1]$ 上单调减少,

值域为 $[-17,15]$;

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$,

$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$上单调增加,

值域为$[-17,+\infty)$.

可知 $-17<b<15$.

利用函数的单调性证明不等式

例7 证明: 当 $x>0$时, $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

证明 令 $f(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$,

$$f'(x) = e^x - 1 - x,$$

$$f''(x) = e^x - 1,$$

当 $x > 0$ 时, $f''(x) > 0$,

$$f'(x) > f'(0) = 0,$$

$$f(x) > f(0) = 0.$$

即得所证.

利用函数的单调性证明不等式

例8 证明：当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x > \frac{2}{\pi} x$.

证法一 令 $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi} x$,

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi},$$

得驻点 $x_0 = \arccos \frac{2}{\pi}$.

当 $0 < x < x_0$ 时，$f'(x) > 0$, $f(x) > f(0) = 0$;

当 $x_0 \le x < \frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x) \le 0$, $f(x) > f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

即得所证.

利用函数的单调性证明不等式

例8 证明: 当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$.

证法二 令 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$,

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \tan x)}{x^2}$$

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > x$, 因此 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$在$(0, \dfrac{\pi}{2}]$单调减少. 于是,

当 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, $f(x) > f(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{2}{\pi}$,

即
$$\sin x > \frac{2}{\pi}x.$$

利用函数的凹凸性证明不等式

例9 证明不等式

$$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}, (x>0, y>0, x\neq y).$$

证明 令 $f(t) = t\ln t\ (t>0)$,

则 $f'(t) = \ln t + 1,\quad f''(t) = \frac{1}{t} > 0,$

$\therefore f(t) = t\ln t$ 在 (x, y) 或 (y, x) 是凹的.

于是 $\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f(\frac{x+y}{2})$

即 $\frac{1}{2}[x\ln x + y\ln y] > \frac{x+y}{2}\ln\frac{x+y}{2},$

即 $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\frac{x+y}{2}.$

恒等式的证明

例10 证明:当 $x>-1$ 时, $\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$.

证明 设 $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}$, $(x>-1)$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2}\cdot\frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}=0,$$

$\therefore$ $f(x)\equiv C$, $(x>-1)$. 而 $C=f(0)=\frac{\pi}{4}$,

因此, 当 $x>-1$ 时, $\arctan x+\arctan\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}$.

用罗尔定理证明方程 $F'(x)=0$ 在(a,b)内存在根

例11 若 $f(x)$ 可导，试证在 $f(x)$ 的两个零点之间，一定有 $2xf(x)+f'(x)=0$ 的零点.

分析 寻找 $F(x)$，使 $2xf(x)+f'(x)=0$，化为 $F'(x)=0$.

猜测 $\boxed{F(x)=u(x)f(x).}$

$$F'(x)=u'f+uf'=0,\quad \frac{u'}{u}f+f'=0,$$

$$\frac{u'}{u}=2x,\quad (\ln u)'=(x^2)',\ \ln u=x^2,\quad u=e^{x^2},$$

$$\boxed{F(x)=e^{x^2}f(x).}$$

用罗尔定理证明方程 $F'(x)=0$ 在(a,b)内存在根

例11 若 $f(x)$ 可导，试证在 $f(x)$ 的两个零点之间，一定有 $2xf(x)+f'(x)=0$ 的零点.

证明 令 $\boxed{F(x)=e^{x^2}f(x).}$

设 $f(x_1)=0,\ f(x_2)=0,\ x_1<x_2$,

则 $F(x_1)=F(x_2)=0$,

由罗尔定理, $\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$F'(\xi)=2\xi e^{\xi^2}f(\xi)+e^{\xi^2}f'(\xi)=e^{\xi^2}[2\xi f(\xi)+f'(\xi)]=0$$

$\Theta\ e^{\xi^2}\neq 0$, 因此必定有

$$2\xi f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

例12 设函数 $f(x)$ 在[0, 3] 上连续, 在(0, 3) 内可导, 且

$$f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1,$$

试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证 因 $f(x)$ 在[0, 3]上连续, 所以在[0, 2]上连续, 且在[0, 2]上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M$$

$$\longrightarrow\quad m\le\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

分析: 所给条件可写为 $\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1,\ f(3)=1$

想到找一点 c, 使 $f(c)=\dfrac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]$

例12 设函数 $f(x)$ 在[0, 3] 上连续, 在(0, 3) 内可导, 且

$$f(0)+f(1)+f(2)=3,\ f(3)=1,$$

试证必存在 $\xi\in(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

证 因 $f(x)$ 在[0, 3]上连续, 所以在[0, 2]上连续, 且在[0, 2]上有最大值 M 与最小值 m, 故

$$m\le f(0),\ f(1),\ f(2)\le M$$

$$\longrightarrow\quad m\le\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]\le M$$

由介值定理, 至少存在一点 $c\in[0,2]$, 使

$$f(c)=\frac{1}{3}[f(0)+f(1)+f(2)]=1$$

$\because$ $f(c)=f(3)=1$,且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续, 在$(c,3)$内可导,

由罗尔定理知, 必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$, 使 $f'(\xi)=0$.

例13 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 且 $|f'(x)| \le M$,

证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

证 取点 $x_0 \in (a,b)$, 再取异于 x_0 的点 $x \in (a,b)$, 对 $f(x)$ 在以 x_0, x 为端点的区间上用拉氏中值定理, 得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \quad (\xi \text{ 界于 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间})$$

$$\therefore \quad |f(x)| = |f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)|$$

$$\le |f(x_0)| + |f'(\xi)||x - x_0|$$

$$\le |f(x_0)| + M(b-a) = K \quad \text{(定数)}$$

可见对任意 $x \in (a,b)$, $|f(x)| \le K$, 即得所证.

例14 设 $f(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上可导, 且 $f(x)+f'(x)>0$,

证明 $f(x)$ 至多只有一个零点 .

证 设 $\varphi(x)=e^{x}f(x)$

则 $\varphi'(x)=e^{x}[f(x)+f'(x)]>0$

故 $\varphi(x)$在 $(-\infty,+\infty)$上连续单调递增, 从而至多只有一个零点 .

又因 $e^{x}>0$, 因此 $f(x)$也至多只有一个零点 .

思考: 若题中 $f(x)+f'(x)>0$ 改为 $f(x)-f'(x)<0$, 其它不变时, 如何设辅助函数?

$\boxed{\varphi(x)=e^{-x}f(x)}$

例15 设函数 $f(x)$在 $[0,1]$上二阶可导, $f(0)=f(1)$,

且 $|f''(x)|\le 2$, 证明 $|f'(x)|\le 1$.

证 $\forall x\in[0,1]$, 由泰勒公式得

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2 \quad (0<\eta<1)$$

$$f(0)=f(x)-f'(x)\,x+\frac{1}{2}f''(\xi)\,x^2 \quad (0<\xi<1)$$

两式相减得 $0=f'(x)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2$

$$\therefore\ |f'(x)|=\left|\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x)^2-\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\right|$$

$$\le\frac{1}{2}|f''(\eta)|(1-x)^2+\frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2$$

$$\le(1-x)^2+x^2=1-2x(1-x)\le 1,\quad x\in[0,1]$$

思考题1

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0<a<b$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

证 欲证 $\dfrac{f'(\xi)}{a+b}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$，即要证 $\dfrac{f'(\xi)(b-a)}{b^2-a^2}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$.

因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉氏中值定理条件，故有

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\quad \xi\in(a,b) \qquad ①$$

又因 $f(x)$ 及 x^2 在 $[a,b]$ 上满足柯西定理条件，故有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta},\quad \eta\in(a,b) \qquad ②$$

将①代入②，化简得 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$，$\xi,\eta\in(a,b)$

思考题2

已知 $f(x)$ 具有二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0,\ f(1)=0$.

证明：在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ,使得 $f''(\xi)=0$.

证明 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，得 $f(0)=0,\quad f'(0)=0$.

Q $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=f(1)=0$，

由罗尔定理，在 $(0,1)$ 内至少存在一点 η，使 $f'(\eta)=0$.

又Q $f'(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上可导，且 $f'(0)=f'(\eta)=0$，

再由罗尔定理，在 $(0,\eta)\subset(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$f''(\xi)=0$.

思考题3

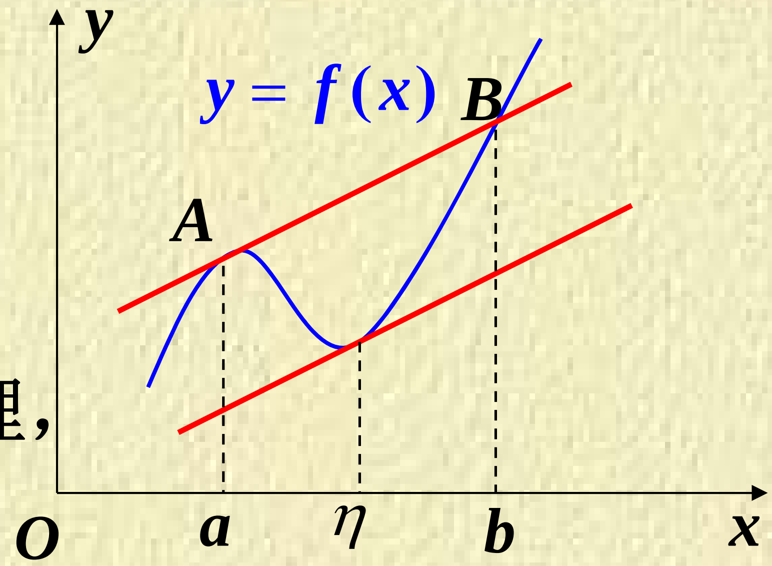
设 $f(x)$ 二阶可导，过曲线 $y=f(x)$ 上点 A 的切线与曲线 $y=f(x)$ 有另一交点 B，证明存在 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明 设点 A,B 的坐标分别为 $(a,f(a)),(b,f(b))$，

过曲线 $y=f(x)$ 上点 A 的切线斜率为 k，

由题设知

$$k=f'(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



不妨设 $a<b$. 因 $f(x)$ 二阶可导，

在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，

存在 $\eta\in(a,b)$，使 $f'(\eta)=k$

在 $[a,\eta]$ 上应用罗尔定理，存在 $\xi\in(a,\eta)$，使 $f''(\xi)=0$.

作业

P180　4.　5.　7.　8.　10.

11.(2)　17.