§3.7 曲率

一、弧微分

二、曲率及其计算公式

三、曲率圆与曲率半径

一、弧微分

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有连续导数 .

有向弧长:

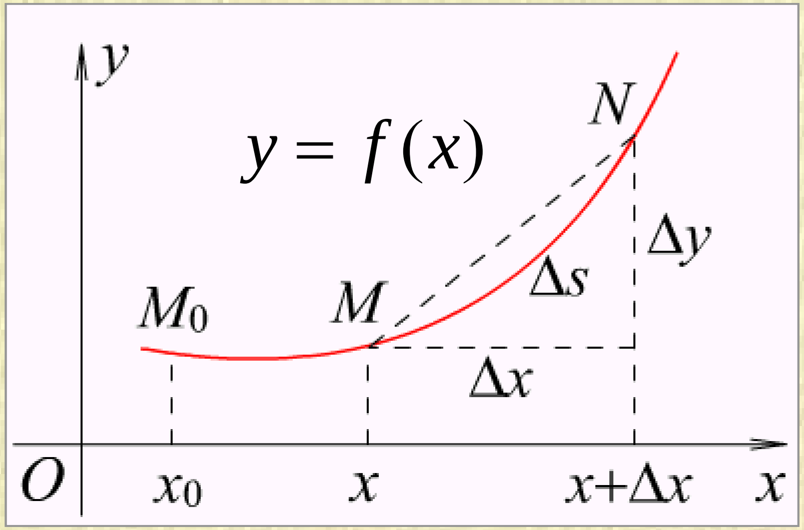
$$s(x)=\operatorname{sgn}(x-x_0)\cdot|\overset{\frown}{M_0M}|,$$

$$|\Delta s|\approx|MN|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

弧微分公式:

$$\boxed{|ds|=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}}$$

$$\boxed{ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx\,.}$$

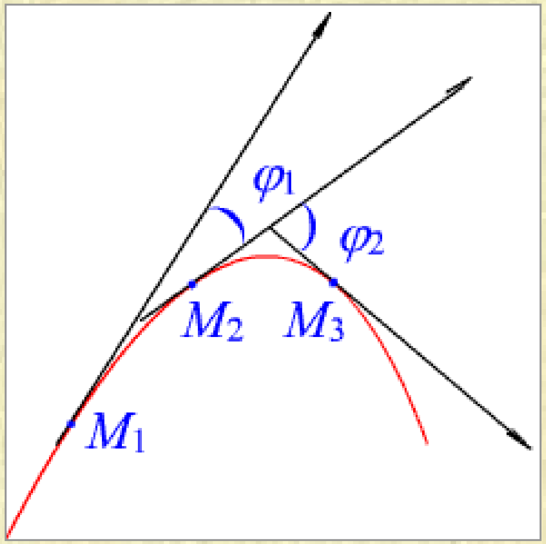


二、曲率及其计算公式

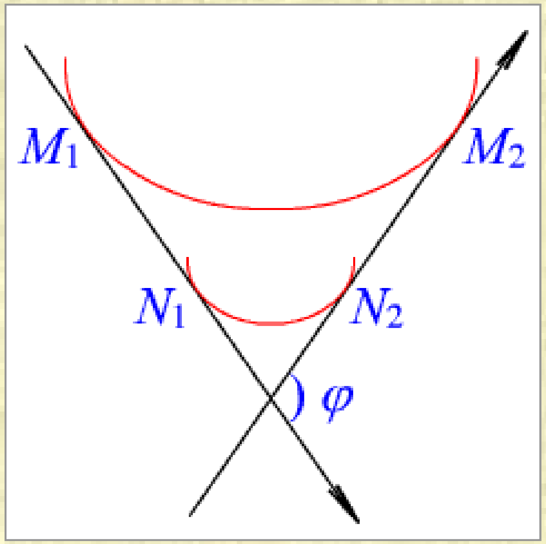
观察与思考：

观察曲线的弯曲程度与哪些因素有关．怎样衡量曲线的弯曲程度?

弧段弯曲程度越大转角越大

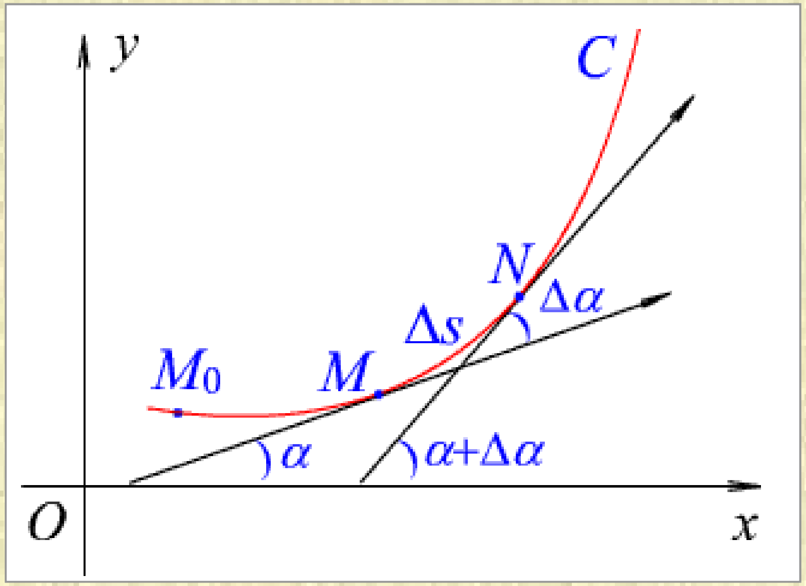


转角相同弧段越短弯曲程度越大



❖曲率及其计算公式

设M和N是光滑曲线C上的两点，M和N分别对应于弧s和$s+\Delta s$，以M和N为切点的切线的倾角分别为α和$\alpha+\Delta\alpha$.



记 $\overline{K}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$，称 $\overline{K}$ 为弧段 MN 的平均曲率.

记 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$，称 K 为曲线 C 在点 M 处的曲率.

在 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\dfrac{d\alpha}{ds}$ 存在的条件下，$K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$.

❖曲率及其计算公式

记 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$，称 K 为曲线 C 在点 M 处的曲率.

在 $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\dfrac{d\alpha}{ds}$ 存在的条件下，$K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$.

设曲线C的方程为$y=f(x)$, 且$f(x)$具有二阶导数.

因为$\tan\alpha=y'$，**所以**$\sec^2\alpha d\alpha=y''dx$,

$$d\alpha=\frac{y''}{\sec^2\alpha}dx=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}dx=\frac{y''}{1+y'^2}dx\,.$$

又知 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$，从而得曲率的计算公式

$$\boxed{K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}\,.}$$

曲率的计算公式：$K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

例1 计算圆 $x^2+y^2=R^2$ 的曲率(几何方法见P170).

解 $2x+2yy'=0,$

$$y'=-\frac{x}{y},$$

$$y''=-\frac{y-xy'}{y^2}=-\frac{R^2}{y^3},$$

$$K=\frac{|y''|}{\sqrt{[1+(y')^2]^3}}=\frac{1}{R}.$$

曲率的计算公式：$K=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$.

例2 抛物线$y=ax^2+bx+c$上哪一点处的曲率最大?

解 由$y=ax^2+bx+c$，得

$y'=2ax+b$，$y''=2a$,

代入曲率公式，得

$$K=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{3/2}}.$$

显然, 当$2ax+b=0$时曲率最大.

曲率最大时, $x=-\dfrac{b}{2a}$，对应的点为抛物线的顶点.

因此，抛物线在顶点处的曲率最大，此处$K=|2a|$.

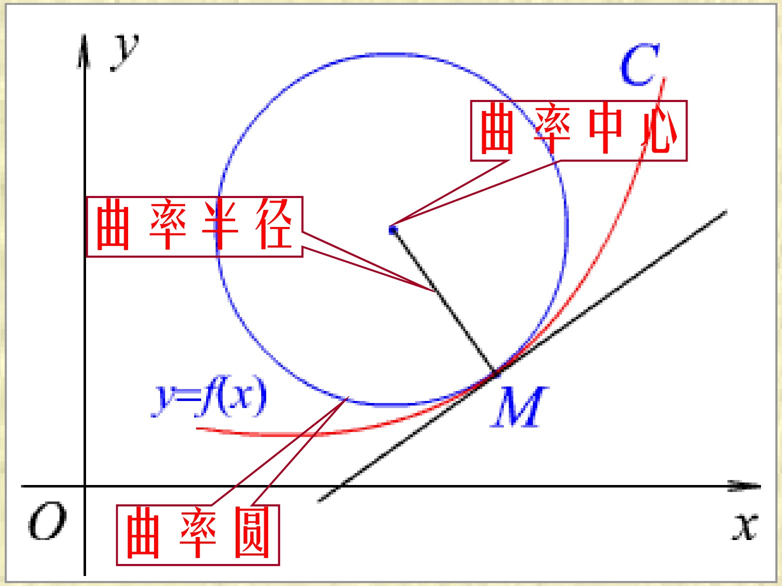
三、曲率圆与曲率半径

❖曲率圆与曲率半径

设曲线在点M处的曲率为$K(K\neq 0)$.

在曲线凹的一侧作一个与曲线相切于M且半径为$\rho=K^{-1}$的圆.

上述圆叫做曲线在点M处的曲率圆，其圆心叫做曲率中心，其半径ρ叫做曲率半径.



❖曲率与曲率半径关系

$$\rho=\frac{1}{K},\quad K=\frac{1}{\rho}.$$

例3 设工件表面的截线为抛物线$y=0.4x^2$. 现在要用砂轮磨削其内表面. 问用直径多大的砂轮才比较合适?

解 砂轮的半径不应大于抛物线顶点处的曲率半径.

$$y'=0.8x,\ y''=0.8,$$

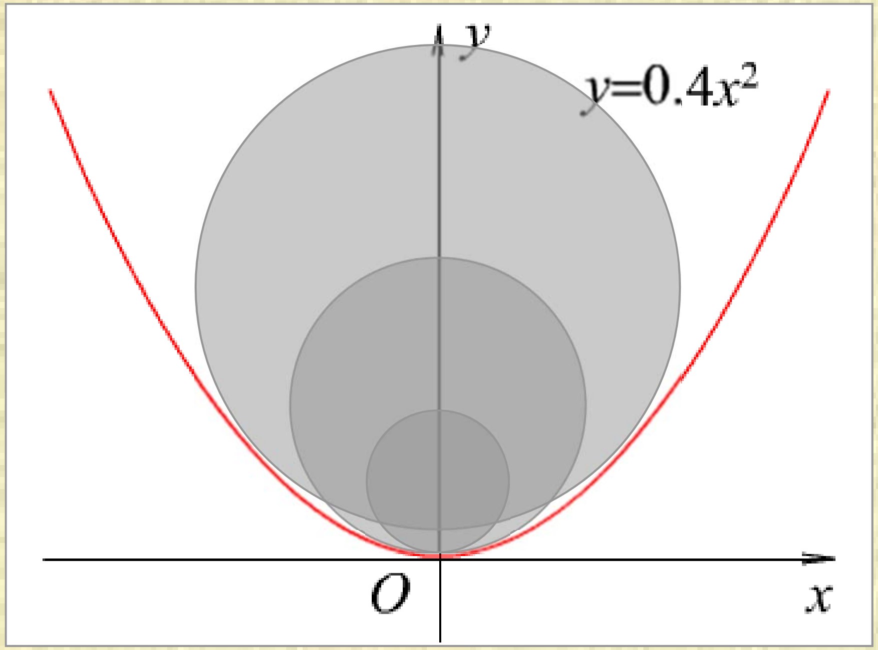
$$y'|_{x=0}=0,\ y''|_{x=0}=0.8.$$

把它们代入曲率公式, 得

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=0.8.$$

抛物线顶点处的曲率半径为

$$\rho=K^{-1}=1.25.$$



因此, 选用砂轮的半径不得超过1.25单位长, 即直径不得超过2.50单位长.

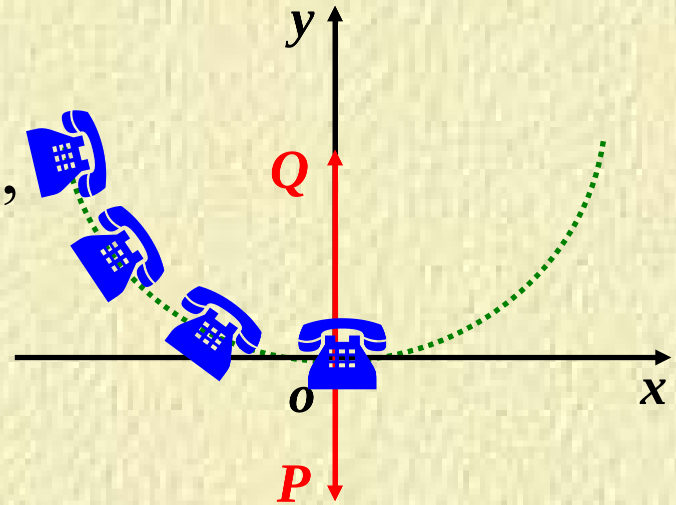
例4　飞机沿抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4000}$(单位为米)俯冲飞行,

在原点O处速度为 $v=400$米/秒,飞行员体重70千

克.求俯冲到原点时,飞行员对座椅的压力.

解　如图,受力分析 $F=Q-P$,

视飞行员在点o作匀速圆周运动,



$$y'\Big|_{x=0}=\frac{x}{2000}\Big|_{x=0}=0,$$

$$y''\Big|_{x=0}=\frac{1}{2000}.$$

得曲率为 $k\Big|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2000}.$

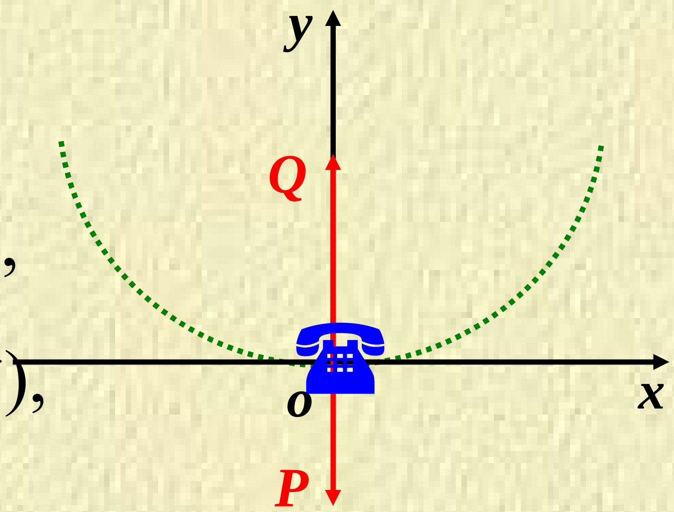
曲率半径为 $\rho=2000$ 米.

$$\boxed{\therefore F=\frac{mv^2}{\rho}.}$$

例4 飞机沿抛物线 $y=\dfrac{x^2}{4000}$(单位为米)俯冲飞行,在原点O处速度为$v=400$米/秒,飞行员体重70千克.求俯冲到原点时,飞行员对座椅的压力.

解 $\therefore F=\dfrac{70\times 400^2}{2000}$

$=5600(\text{牛})\approx 571.4(\text{千克}),$



$\therefore Q\approx 70(\text{千克力})+571.4(\text{千克力}),$

$=641.5(\text{千克力}).$

即:飞行员对座椅的压力为641.5千克力.

曲率半径为 $\rho=2000$ 米.

$$\boxed{\therefore F=\frac{mv^2}{\rho}.}$$

作 业

习题3–7 (P175):

1.

5.

7.