§3.3 泰勒公式

一、问题的提出

二、泰勒中值定理

三、麦克劳林公式

一、问题的提出

根据函数的微分, 有

$$f(x)=\underline{f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}+\underline{o(x-x_0)}\quad (\text{当}|x-x_0|\text{很小时}),$$

略掉 $o(x-x_0)$, 得到求 $f(x)$的近似公式

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\quad (\text{当}|x-x_0|\text{很小时}),$$

其误差为

$$R(x)=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0).$$

近似公式的不足: 精确度不高, 误差难于估计.

提高精确度: $o[(x-x_0)^n]$. 改为多项式 $P(x)$.

一、问题的提出

问题:

设函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a, b)内具有直到n阶导数, 对任一$x\in(a, b)$, 是否存在多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \Lambda + a_n(x - x_0)^n$$

使成立 $$f(x) = P_n(x) + o[(x - x_0)^n].$$

注: 当函数$f(x)$为次数高于n的多项式时, 有

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \Lambda + a_n(x - x_0)^n + \Lambda + a_{n+k}(x - x_0)^{n+k}$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + \Lambda + a_n(x - x_0)^n + o[(x - x_0)^n]$$

一、问题的提出

问题:

设函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a, b)内具有直到n阶导数, 对任一$x \in (a, b)$, 是否存在多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \Lambda + a_n(x - x_0)^n$$

使成立 $$f(x) = P_n(x) + o[(x - x_0)^n].$$

注: 问题的回答是肯定的.

$f(x) = P_n(x) + o[(x - x_0)^n]$成立的充分必要条件是:

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0),\ k = 0,1,\Lambda\ ,n$$

分析

一、问题的提出

❖定理

设函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a, b)内具有直到n阶导数, 对任一$x\in(a, b)$, 存在多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \Lambda + a_n(x - x_0)^n$$

使成立 $$f(x) = P_n(x) + o[(x - x_0)^n].$$

•多项式的确定 $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0),\ k = 0,1,\Lambda\ ,n$

注: 问题的回答是肯定的.

$f(x) = P_n(x) + o[(x - x_0)^n]$成立的充分必要条件是:

$$f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0),\ k = 0,1,\Lambda\ ,n$$

一、问题的提出

❖定理

设函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a, b)内具有直到n阶导数, 对任一$x\in(a, b)$, 存在多项式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \Lambda + a_n(x-x_0)^n$$

使成立 $f(x) = P_n(x) + o[(x-x_0)^n]$.

•多项式的确定 $f^{(k)}(x_0) = P_n^{(k)}(x_0),\ k = 0,1,\Lambda\ ,n$

•多项式系数的确定 $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\ (k=0,1,2,\cdots,n)$.

一、问题的提出

❖定理

设函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a, b)内具有直到n阶导数, 对任一$x\in(a, b)$, 存在多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \Lambda + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

使成立 $$f(x) = P_n(x) + \underline{o[(x - x_0)^n]}.$$

佩亚诺型余项

•拉格朗日中值公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0),\ \xi\text{介于}x_0\text{与}x\text{之间}$$

二、泰勒中值定理

❖泰勒中值定理

如果函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a, b)内具有直到$(n+1)$阶导数, 则对任一$x\in(a, b)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ介于x_0与x之间).

展开式称为$f(x)$按$(x-x_0)$的幂展开的n阶泰勒公式, 而$R_n(x)$的表达式称为拉格朗日型余项.

•误差估计

如果在区间(a, b)内，对于某个固定的n，$|f^{(n+1)}(x)|$总不超过一个常数M，则有估计式：

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1},$$

$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n].$$

在不需要精确表达余项时，n阶泰勒公式也可写成

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\underline{o[(x-x_0)^n]}.$$

佩亚诺型余项

三、麦克劳林公式

❖麦克劳林公式

提问：

当x_0=0时，泰勒公式及其余项

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

将变成什么形式？

三、麦克劳林公式

❖麦克劳林公式

当x_0=0时, 泰勒公式称为麦克劳林公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

或
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n),$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$. ξ常写为$\theta x(0<\theta<1)$.

•近似公式

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

例1 写出函数 $f(x)=e^x$ 的n阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f(x)=f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$$

所以

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1,$$

于是 $$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\ (0<\theta<1),$$

并有 $$e^x\approx 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n.$$

例2 求$f(x)=\sin x$的n阶麦克劳林公式.

解 因为

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,$$

$$f^{(4)}(x)=\sin x,\ \cdots,\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,$$

$$f^{(4)}(0)=0,\ \cdots,$$

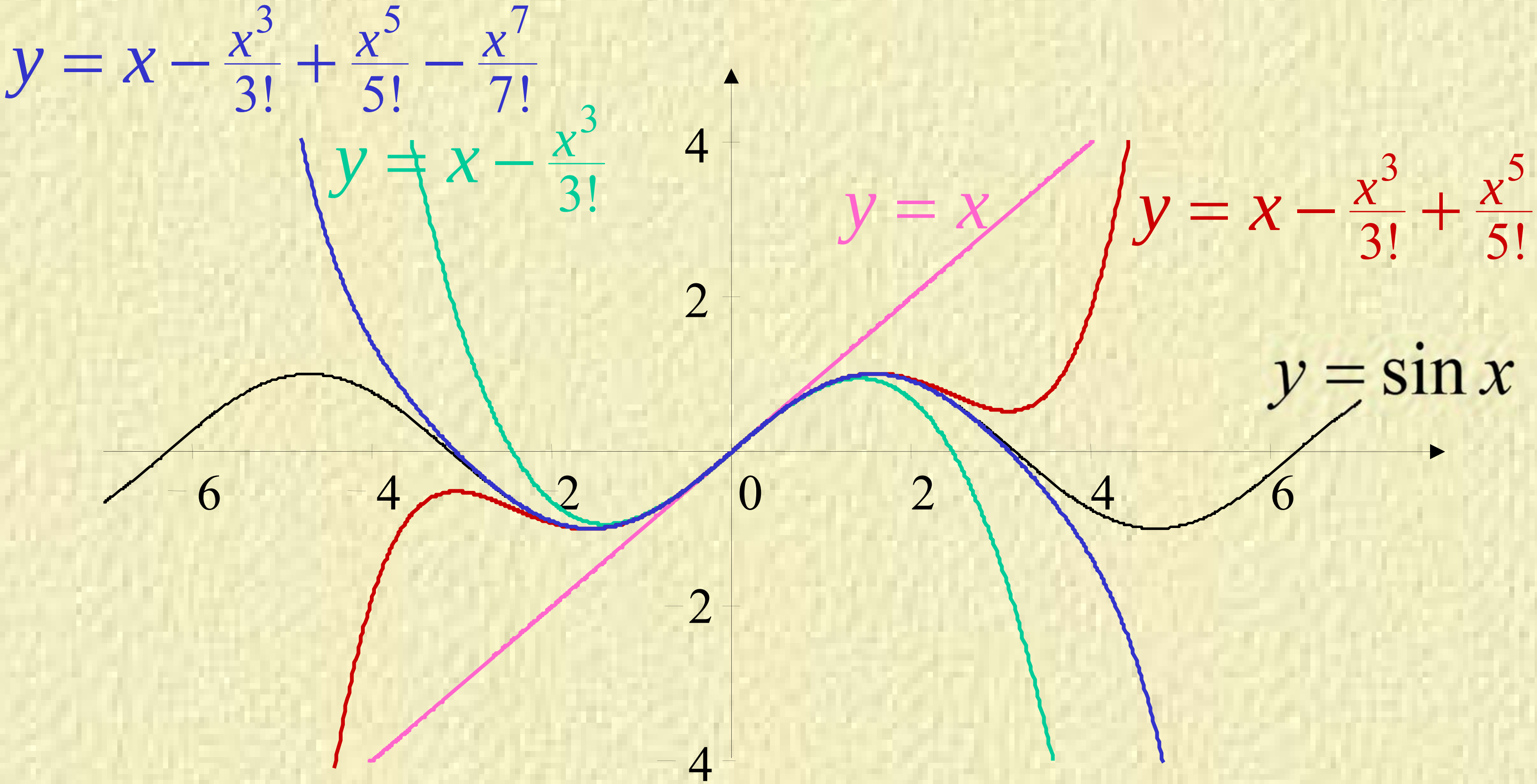
于是

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!}x^{2m-1}+R_{2m}(x).$$

泰勒多项式逼近 $\sin x$

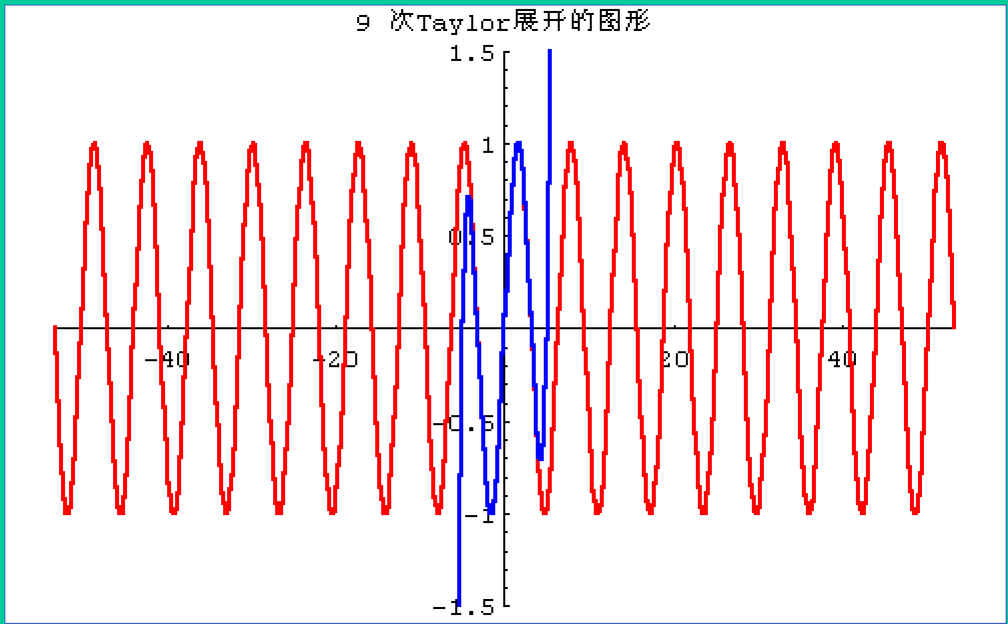
$$\sin x = \underline{x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7} + \frac{1}{9!}x^9 + \Lambda + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

$$+ o(x^{2n})$$



泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



播放

常用函数的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{\sin^3 x}$

解 $$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^3}{3!}-o(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{3!}-\frac{o(x^3)}{x^3}\right)=\frac{1}{6}$$

错解 $$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$$

和差不能等价代换理由: $x-\sin x=\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$

解 $\because$ $e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)$$

$$\therefore\quad e^{x^2}+2\cos x-3=(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!})x^4+o(x^4)$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\frac{7}{12}.$$

$$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n});$$
$$k_1 o(x^n)+k_2 o(x^n)=o(x^n).$$

例5 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

解 $\because e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3),\quad \sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)-x(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

$$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n});$$
$$k_1o(x^n)+k_2o(x^n)=o(x^n).$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$.

解 $原式 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - x\cos x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

思考: 以上解答对否?

1) 用洛必达法则计算本题.

2) 用麦克劳林公式计算本题.

$$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n});$$
$$k_1 o(x^n) + k_2 o(x^n) = o(x^n).$$

作 业

习题3–3 (P143):

1.

4.

10.

$$f(x)=P_n(x)+o[(x-x_0)^n]\ ?$$

分析: $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0} \Longrightarrow f(x_0)=P_n(x_0)$

由洛必达法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{(x-x_0)^{n-1}}(\neq\infty) \Longrightarrow f'(x_0)=P_n'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-P_n''(x)}{(x-x_0)^{n-2}}(\neq\infty) \Longrightarrow f''(x_0)=P_n''(x_0)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0}(\neq\infty) \Longrightarrow f^{(n-1)}(x_0)=P_n^{(n-1)}(x_0)$$

$$=f^{(n)}(x_0)-P_n^{(n)}(x_0)=0 \Longrightarrow f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0)$$

$$f(x)=P_n(x)+o[(x-x_0)^n]\ ?$$

分析:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^n}=0 \Leftarrow f(x_0)=P_n(x_0)$$

由洛必达法则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-P_n'(x)}{(x-x_0)^{n-1}}=0 \Leftarrow f'(x_0)=P_n'(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-P_n''(x)}{(x-x_0)^{n-2}}=0 \Leftarrow f''(x_0)=P_n''(x_0)$$

. . . .

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-P_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0}$$

$$=f^{(n)}(x_0)-P_n^{(n)}(x_0)=0$$

$$\Leftarrow \begin{cases} f^{(n-1)}(x_0)=P_n^{(n-1)}(x_0) \\ f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0) \end{cases}$$

•多项式系数的确定

$$f(x_0)=P_n(x_0)=a_0,\qquad a_0=f(x_0),$$

$$f'(x_0)=P_n'(x_0)=a_1,\qquad a_1=f'(x_0),$$

$$f''(x_0)=P_n''(x_0)=2!a_2,\qquad a_2=\frac{1}{2!}f''(x_0),$$

$$f'''(x_0)=P_n'''(x_0)=3!a_3,\qquad a_3=\frac{1}{3!}f'''(x_0),$$

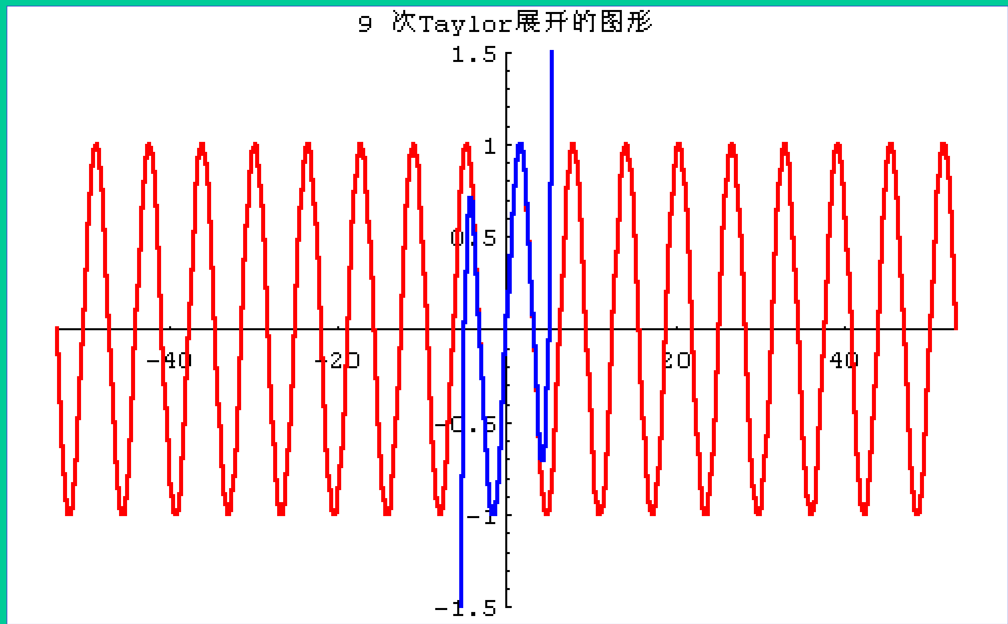
$$\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots,$$

$$f^{(n)}(x_0)=P_n^{(n)}(x_0)=n!a_n.\qquad a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

$$\boxed{P_n^{(n)}(x)=n!a_n.}$$

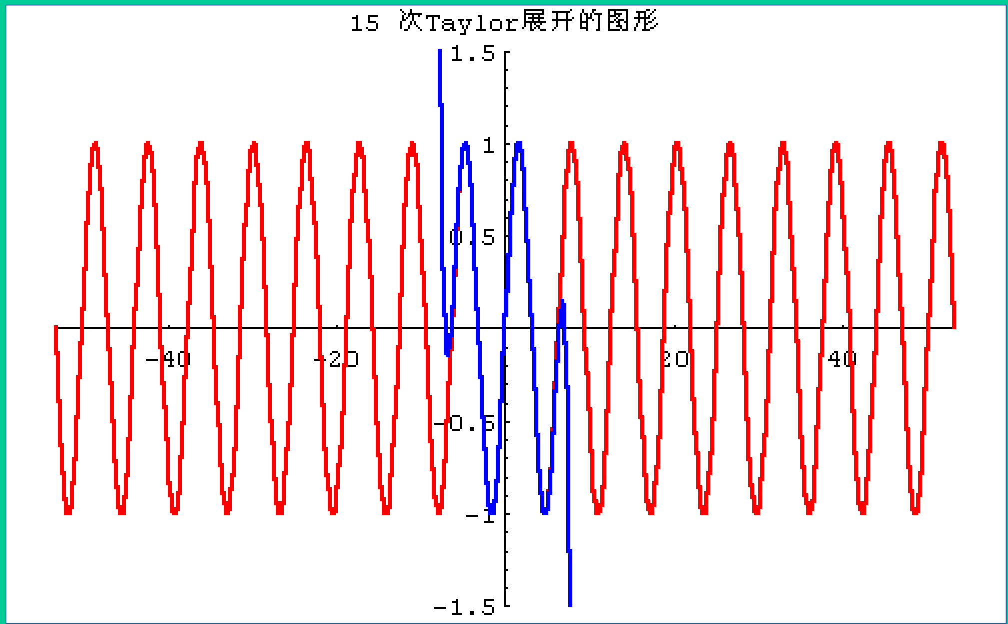
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



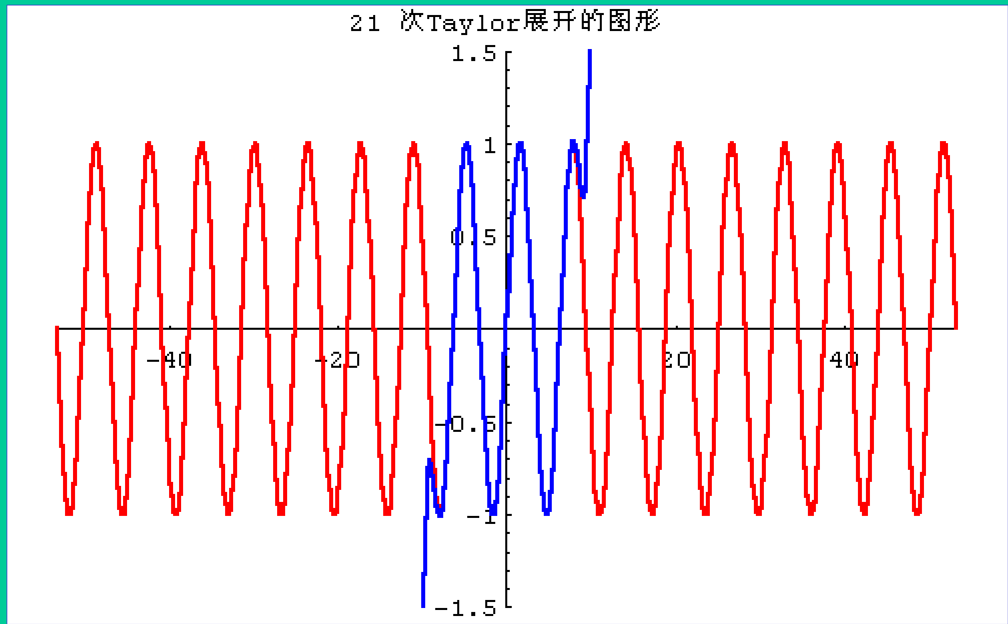
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



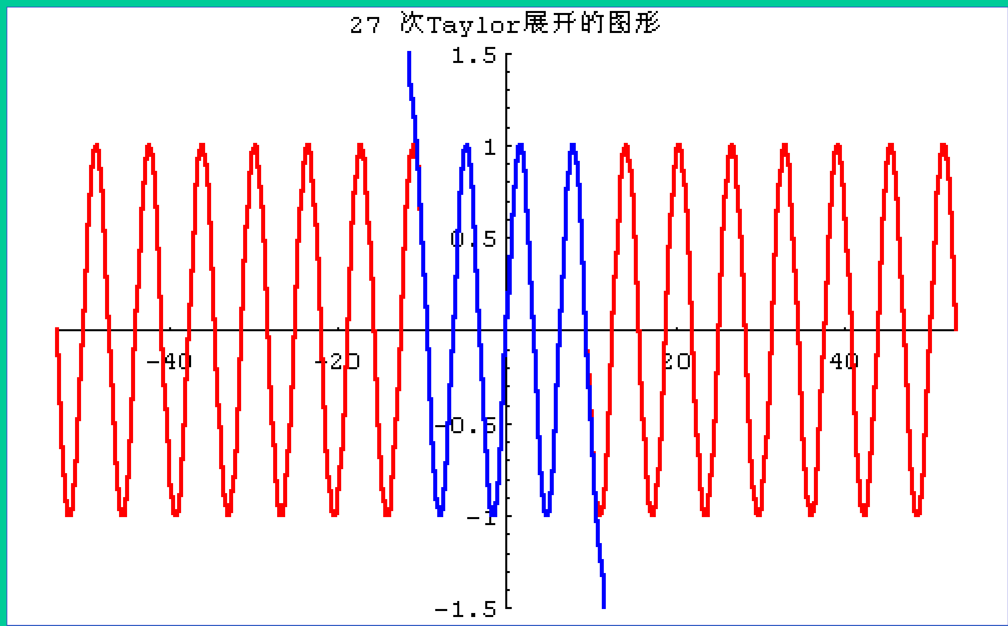
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



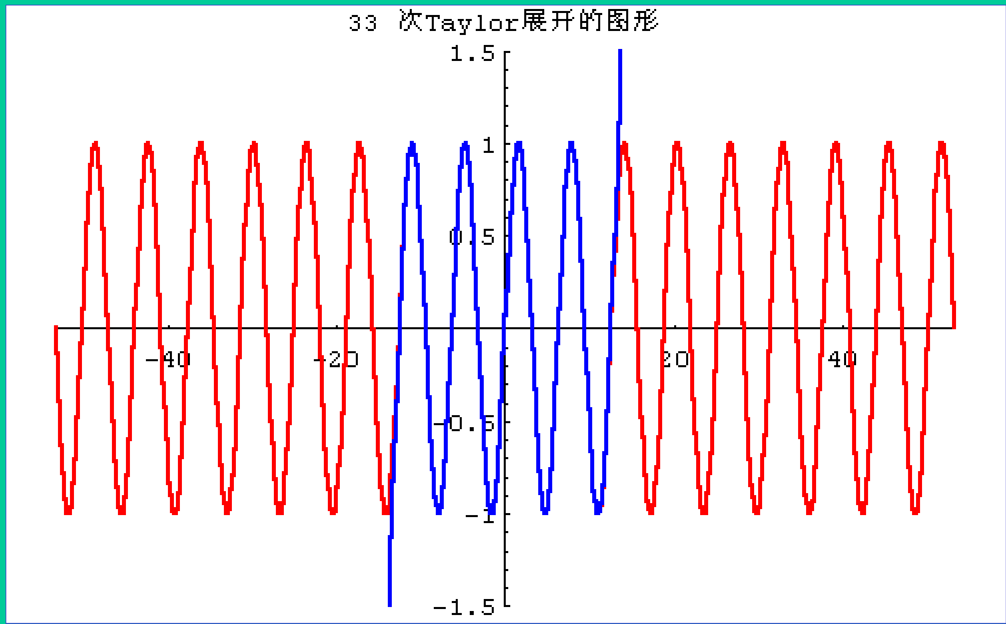
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



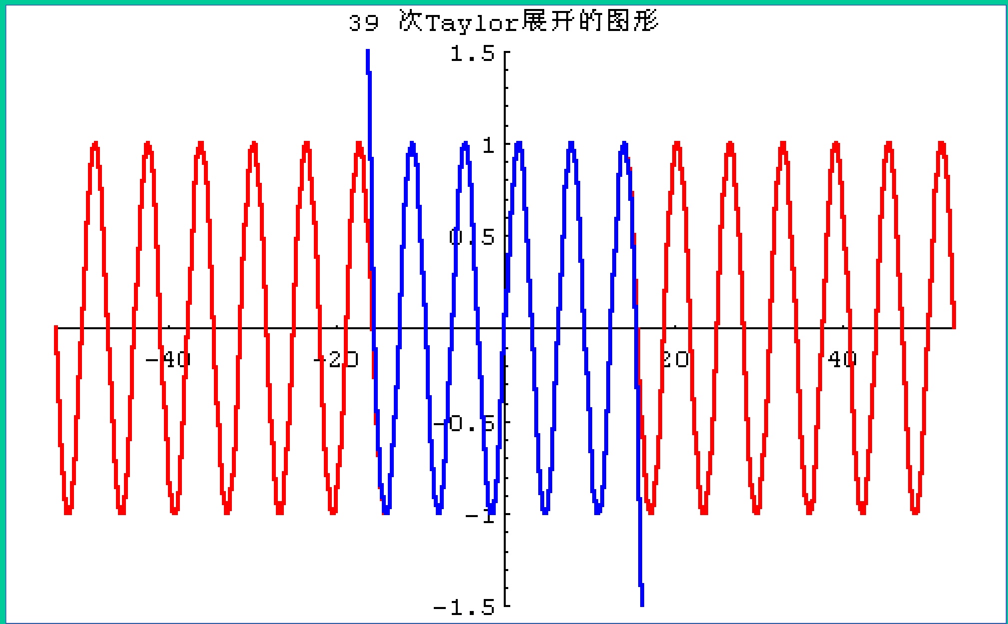
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



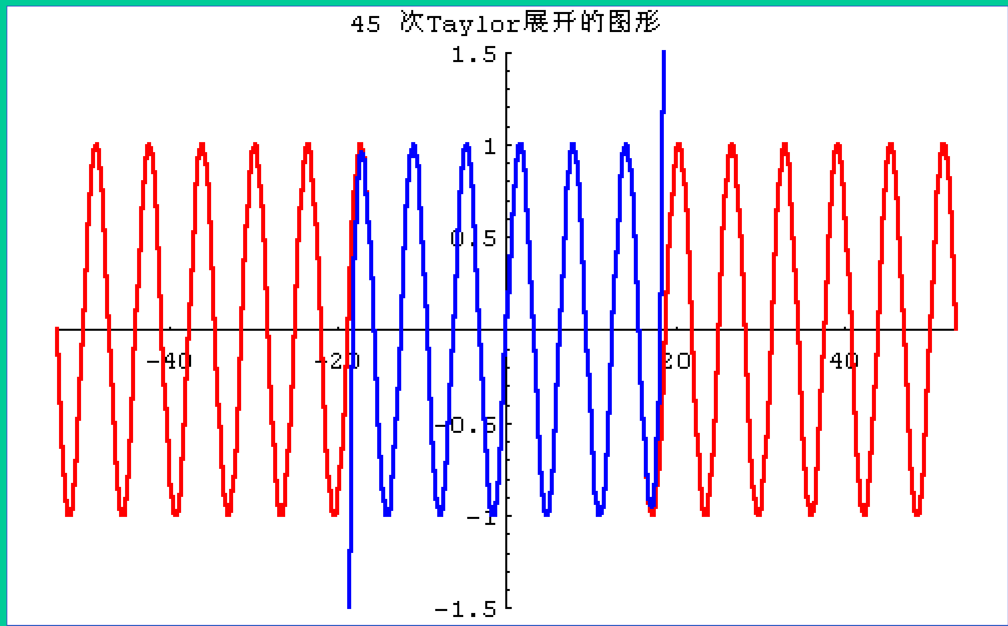
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



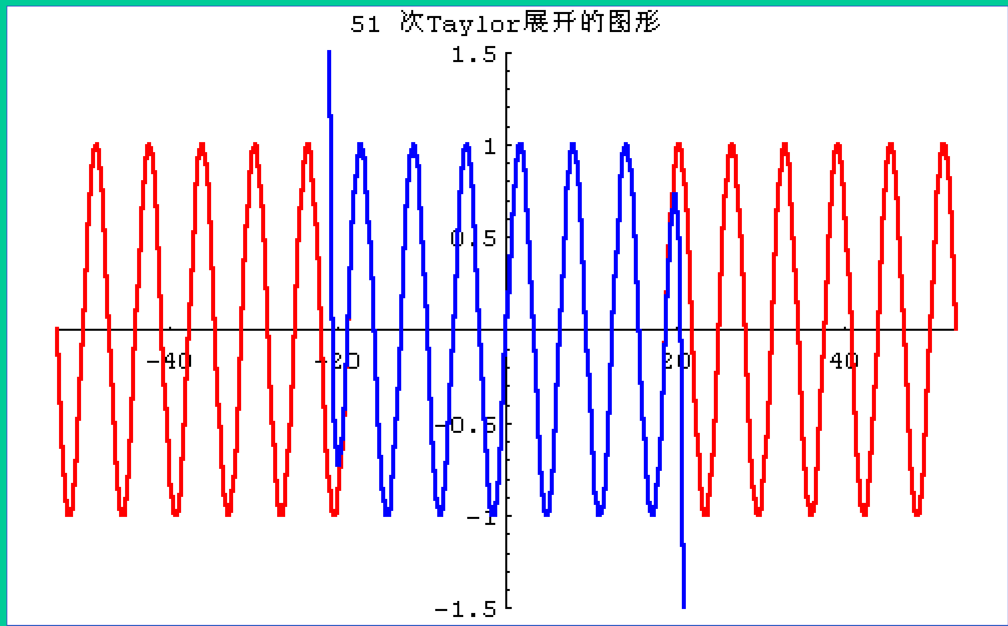
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



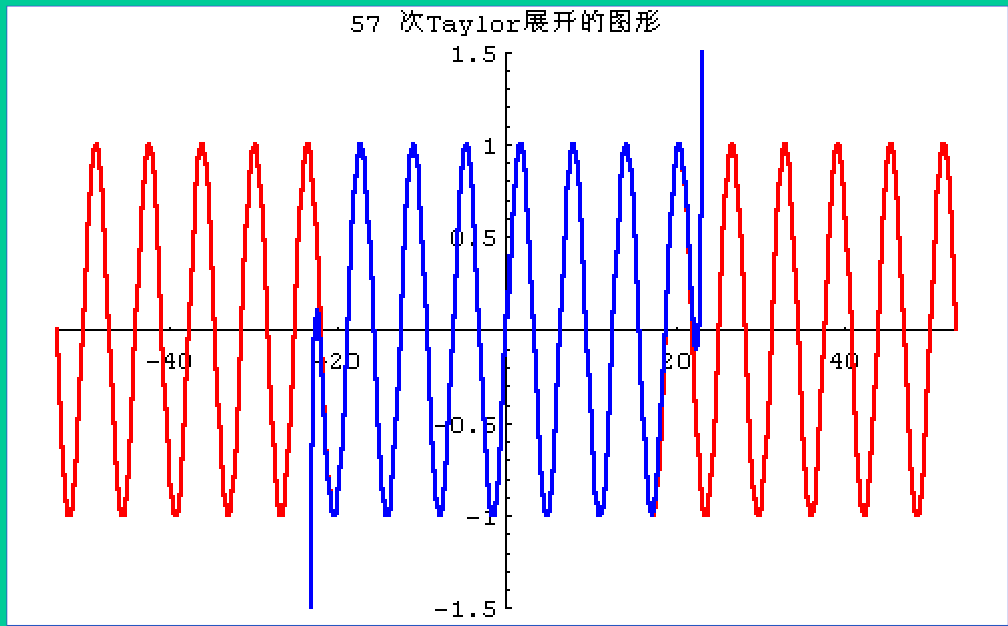
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



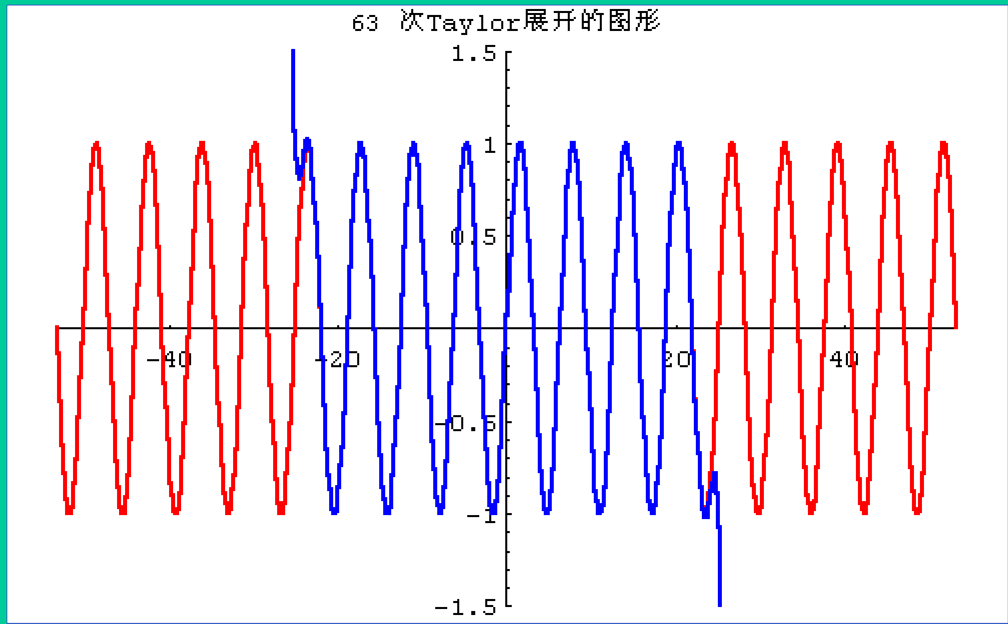
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



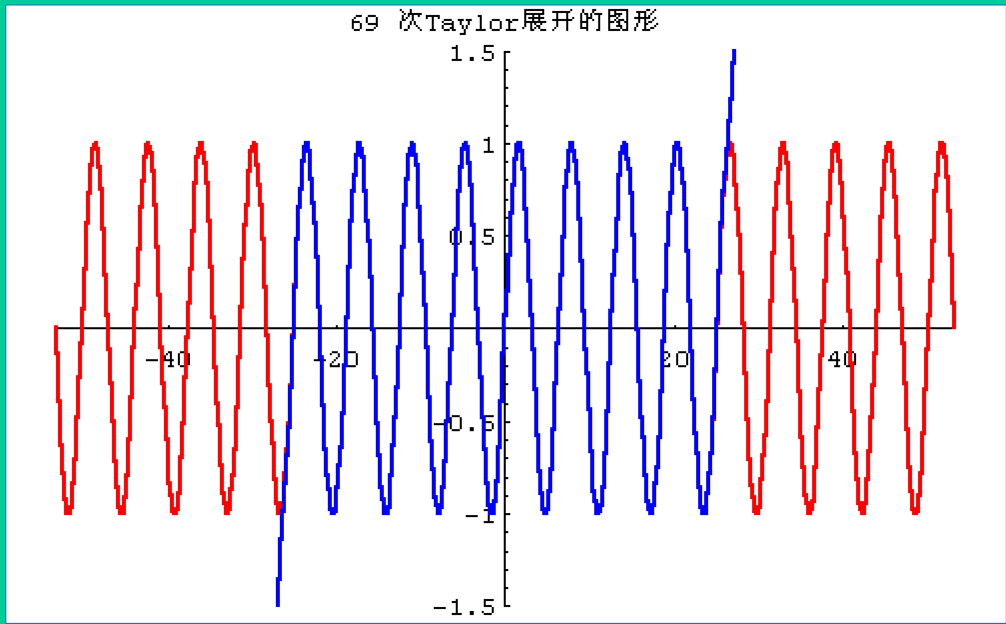
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



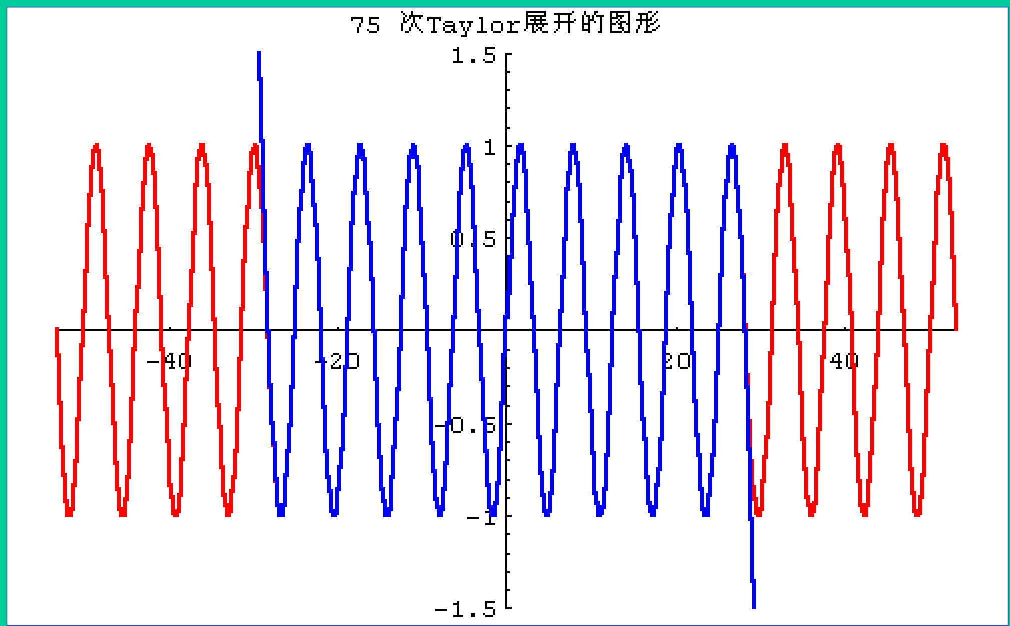
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



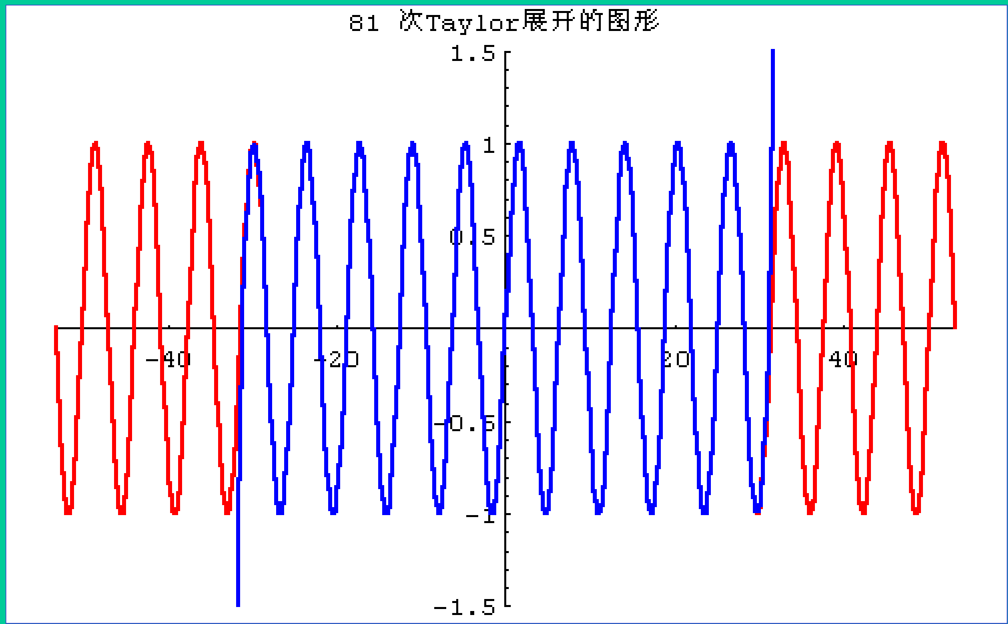
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



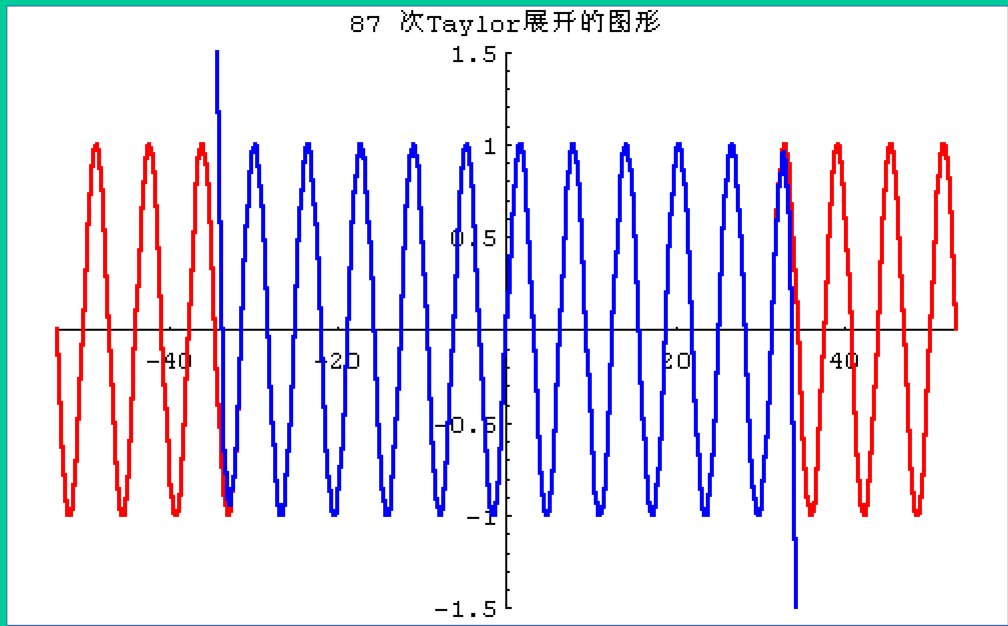
泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



泰勒多项式逼近 $\sin x$

Taylor 公式的数学思想---局部逼近.