# §2.5 隐函数的导数

一、隐函数的导数

二、由参数方程所确定的函数的导数

三、相关变化率

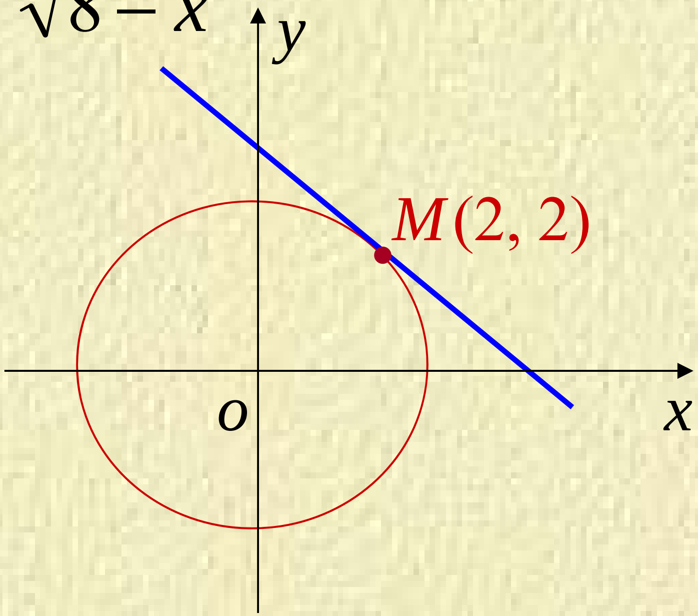
# 一、隐函数的导数

**例1** 求曲线 $x^2+y^2=8$ 在点 $(2, 2)$ 处的切线方程.

**解法一** 问题转化为:

求曲线 $y=\sqrt{8-x^2}$ 在点 $(2, 2)$ 处的切线方程 .

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{8-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{8-x^2}},$$




切线斜率为 $k=y'(2)=-1,$

切线方程为 $y-2=-(x-2),$

即 $x+y-4=0.$

# 一、隐函数的导数

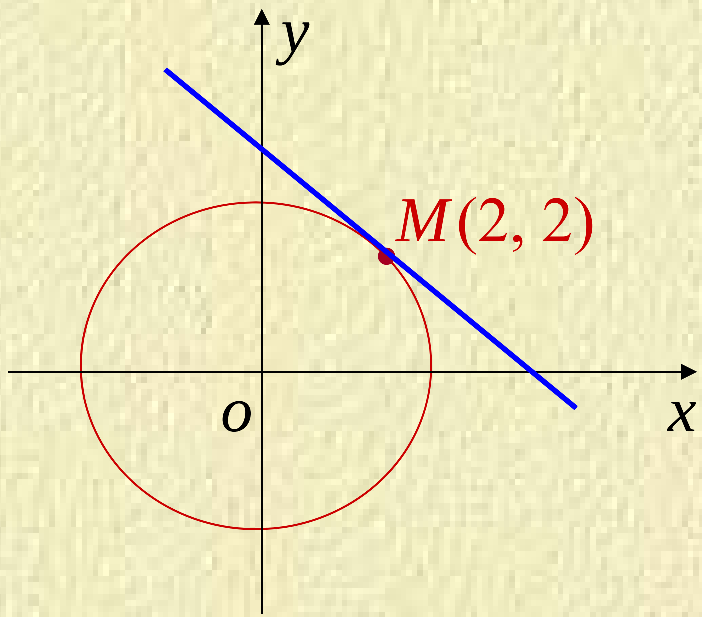
例1　求曲线 $x^2+y^2=8$ 在点 $(2, 2)$ 处的切线方程.

注: 在本例中, 由方程 $x^2+y^2=8$ 确定函数

$$y=\sqrt{8-x^2}，\text{满足 } y(2)=2.$$

$y^2$ 便是 $x$ 的复合函数, 于是

$$\frac{\mathrm{d}(y^2)}{\mathrm{d}x}=2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$



# 一、隐函数的导数

**例1** 求曲线 $x^2+y^2=8$ 在点 $(2, 2)$ 处的切线方程.

**解法二** 方程 $x^2+y^2=8$ 两边对 $x$ 求导, 得

$$2x+2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$$

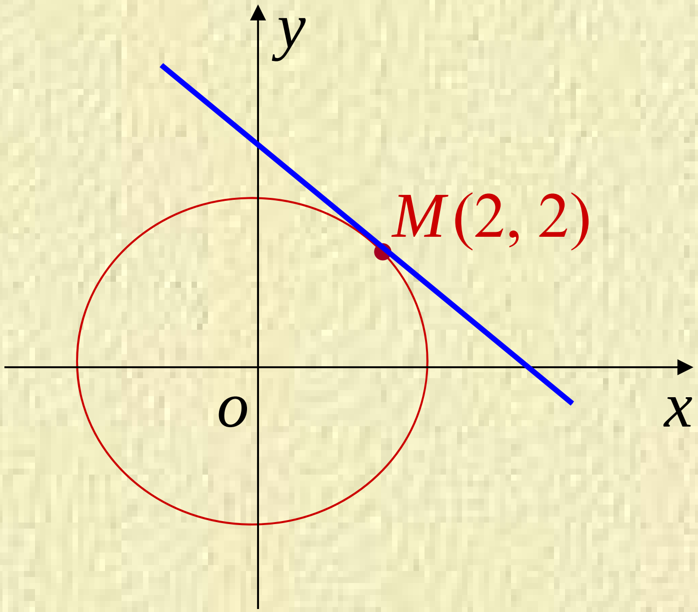
$$\frac{\mathrm{d}(y^2)}{\mathrm{d}x}=2y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y},$$

切线斜率为 $k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(2,2)}=-1,$

切线方程为 $y-2=-(x-2),$

即 $x+y-4=0.$



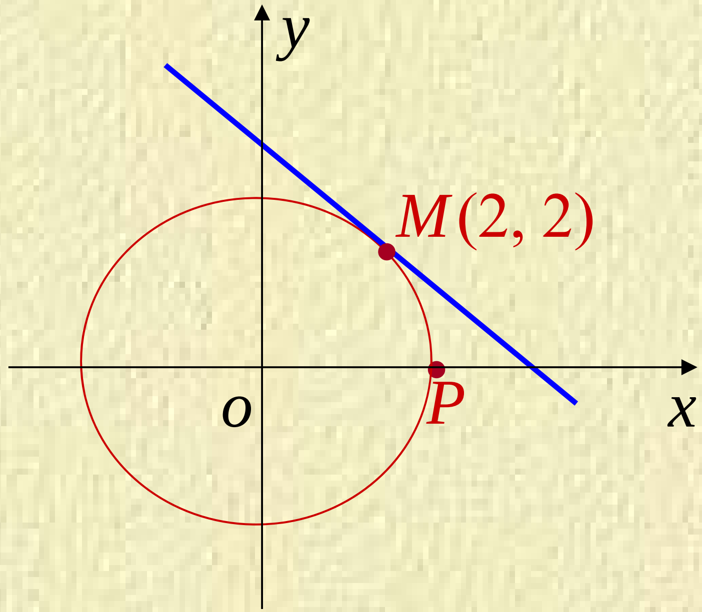
## ❖隐函数

由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

在例1中, 由方程 $x^2+y^2=8$ 确定函数

$$y=\sqrt{8-x^2}, \text{ 满足 } y(2)=2.$$

思考: 内含点 $P$ 的一段小弧, 可否确定一个函数?



## ❖隐函数

由方程 $F(x, y)=0$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 称为隐函数.

在例1中, 由方程 $x^2+y^2=8$ 确定函数

$$y=\sqrt{8-x^2}, \text{ 满足 } y(2)=2.$$

隐函数的显化

问题: 隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法:

直接对方程两边求导.

注意: $y^2, e^y, \ln y \Lambda$ 为复合函数, 于是

$$\frac{d(y^2)}{dx}=2y\cdot\frac{dy}{dx},\quad \frac{d(e^y)}{dx}=e^y\cdot\frac{dy}{dx},\quad \frac{d(\ln y)}{dx}=\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}\Lambda$$

**例2** 求由方程 $xy-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y=0$所确定的隐函数 $y=y(x)$的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

$$\frac{\mathrm{d}(xy)}{\mathrm{d}x}=y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

**解** 方程两边对 $x$ 求导,

$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^y)}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}$, 由原方程知 $x=0,y=0,$

$$\therefore\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{e}^x-y}{x+\mathrm{e}^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=1.$$

**例3** 求由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数 $y$ 的二阶导数.

**解** 方程两边对 $x$ 求导，得

$$1-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

于是 $$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}.$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{C}{u}\right)=-\frac{C}{u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

上式两边再对 $x$ 求导，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2}{(2-\cos y)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2-\cos y)$$

$$=-\frac{2\sin y}{(2-\cos y)^2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{4\sin y}{(2-\cos y)^3}.$$

**例4** 设 $x^4 - xy + y^4 = 1$, 求$y''$在点$(0,1)$处的值.

**解** 方程两边对$x$求导得

$$4x^3 - y - xy' + 4y^3y' = 0 \qquad (1)$$

代入 $x=0,\ y=1$得 $y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{4}$;

$(xy')' = y' + xy''$

将方程(1)两边再对$x$求导得

$(y^3y')' = (3y^2y')y' + y^3y''$

$$12x^2 - 2y' - xy'' + 12y^2(y')^2 + 4y^3y'' = 0$$

代入 $x=0,\ y=1,\ y'\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = \frac{1}{4}$ 得 $y''\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = -\frac{1}{16}$.

## ❖对数求导法

此方法是先在 $y=f(x)$ 的两边取对数，然后用隐函数求导法求出 $y$ 的导数.

用对数求导法的典型形式:

$$\boxed{y = f_1^{\mu_1} \Lambda \ f_n^{\mu_n}}$$

$$\ln y = \ln f_1^{\mu_1} + \Lambda + \ln f_n^{\mu_n}$$

$$= \mu_1 \ln f_1 + \Lambda + \mu_n \ln f_n,$$

$$\frac{1}{y} y' = (\mu_1 \ln f_1 + \Lambda + \mu_n \ln f_n)',$$

$$y' = y(\mu_1 \ln f_1 + \Lambda + \mu_n \ln f_n)'.$$

例5 求 $y=x^{\sin x}$ $(x>0)$ 的导数.

解法一 两边取对数，得

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x,$$

上式两边对 $x$ 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x},$$

于是 $$y'=y(\cos x\cdot\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x})=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}).$$

解法二 这种幂指函数的导数也可按下面的方法求.

$$y=x^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln x},$$

$$y'=e^{\sin x\cdot\ln x}(\sin x\cdot\ln x)'=x^{\sin x}(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}).$$

例6 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, 求$y'$.

解 **等式两边取对数得**

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上式两边对$x$求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

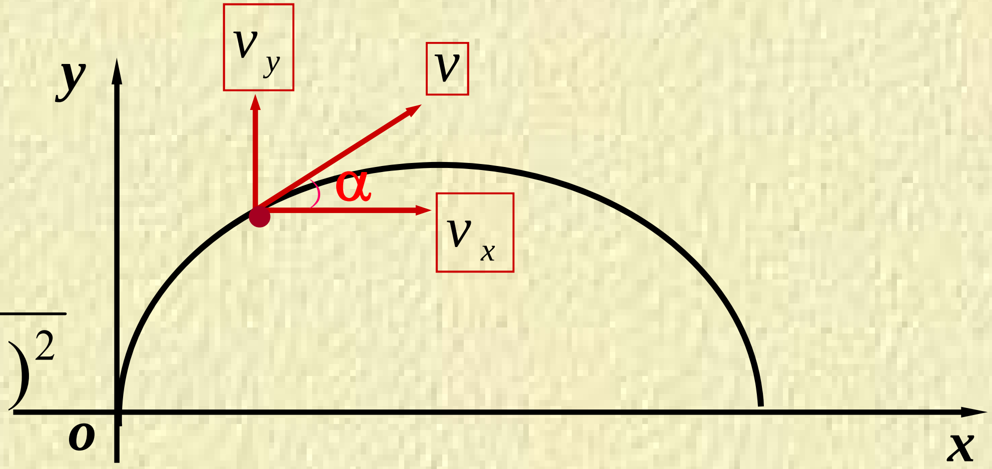
## 二、由参数方程所确定的函数的导数

**例7** 设运动方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$,

水平速度 $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)$

铅直速度 $v_y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\psi'(t)$

速度大小 $v=\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2}$




设 $\alpha$ 为速度方向与水平方向的夹角(切线的倾角),则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha=\frac{v_y}{v_x}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

## 若 $x=\varphi(t)$和 $y=\psi(t)$都可导，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

设 $y$ 与 $x$ 的函数关系是由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定的.

设函数$x=\varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$,

$\therefore\ y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$

再设函数 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$都可导, 且 $\varphi'(t)\neq 0$,

**由复合函数及反函数的求导法则得**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$

若 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 都可导，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

**例8** 求椭圆 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$ 在相应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 点处的切线方程.

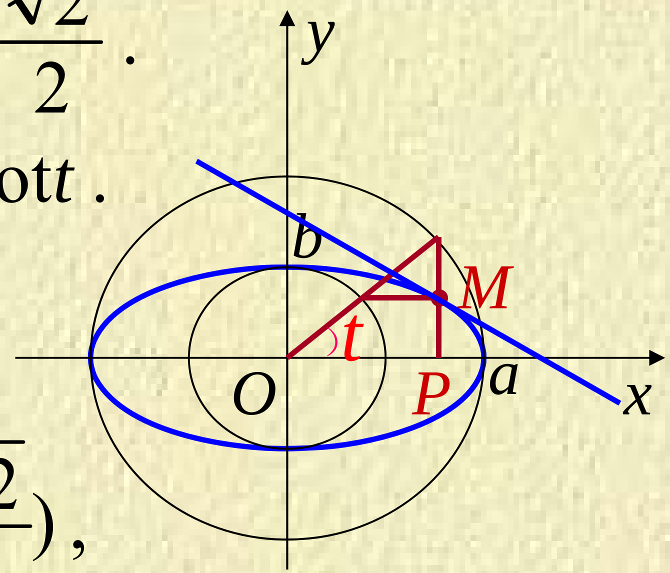
**解** 切点的坐标为 $x_0=a\cos\dfrac{\pi}{4}=a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$OP=a\cos t,$

$MP=b\sin t,$

$$y_0=b\sin\frac{\pi}{4}=b\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'}=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a}\cot t.$$




所求切线的斜率为 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\dfrac{b}{a}$.

切线方程为 $y-b\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-\dfrac{b}{a}\left(x-a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

即 $bx+ay-\sqrt{2}\,ab=0.$

若 $x=\varphi(t)$和 $y=\psi(t)$都可导，则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ .

例9 求由方程 $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数的二阶导数.

解 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(a\sin^3 t)'}{(a\cos^3 t)'}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{(-\tan t)'}{(a\cos^3 t)'}=\frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=\frac{\sec^4 t}{3a\sin t}.$$

提示：记 $Y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{Y'(t)}{x'(t)}$

# 作 业

习题2–5 (P110):

2.　(2)　(3)

4.

8. (2) (3)