§2.4 高阶导数

❖高阶导数的定义

❖高阶导数求法举例

高阶导数的定义

问题　变速直线运动的加速度.

设 $s = f(t)$, 则瞬时速度为 $v(t) = f'(t)$

$\because$ 加速度 α 是速度 v 对时间 t 的变化率

$\therefore$ $$\alpha(t) = v'(t) = [f'(t)]'.$$

定义 如果函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导,

即 $$(f'(x))' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $(f'(x))'$ 为函数 $f(x)$ 在点 x 处的**二阶导数**, 记为 $f''(x), y'', \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$.

高阶导数的定义

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数， 记为

$$f'''(x),\ y''',\ \frac{d^3y}{dx^3}.$$

一般地, $f(x)$的$n-1$阶导数的导数称为 $f(x)$的n阶导数, 记为

$$f^{(n)}(x),\ y^{(n)},\ \frac{d^ny}{dx^n}\text{或}\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

注: 二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

相应地, $f(x)$ 称为零阶导数; $f'(x)$ 称为一阶导数.

计算高阶导数的方法

1. **直接法**: 由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例如, $y = ax + b$, 则有

$$y' = a, y'' = 0, \Lambda, y^{(n)} = 0 (n \geq 3).$$

$y = e^x$, 则有

$$y' = e^x, y'' = e^x, y''' = e^x, \Lambda, y^{(n)} = e^x (n \geq 3).$$

一般地, $\boxed{y^{(n)} = e^x}$

2. **间接法**: 利用已知的高阶导数公式, 通过导数的四则运算, 变量代换等方法, 求出 n 阶导数.

❖ 高阶导数求法举例

例1 设 $y = f(x) = \arctan x$，求 $f'''(0)$.

解

$$y' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$y'' = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$

$$y''' = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

$$f'''(0) = \left.\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\right|_{x=0} = -2.$$

例2 设 $y = x^{a} (a \in R)$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y' = ax^{a-1}$,

$$y'' = (ax^{a-1})' = a(a-1)x^{a-2},$$

$$y''' = (a(a-1)x^{a-2})' = a(a-1)(a-2)x^{a-3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = a(a-1)\cdots(a-n+1)x^{a-n} (n \geq 1),$$

若 a 为自然数 n, 则

$$y^{(n)} = (x^{n})^{(n)} = n!, \quad y^{(n+1)} = (n!)' = 0.$$

注: 求 n 阶导数时, 求出 $1-3$ 或4阶后, 不要急于合并, 分析结果的规律性, 写出 n 阶导数 (利用数学归纳法).

例3 设 $y=\ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$.

解

$$y'=\frac{1}{1+x},$$

$$y''=-\frac{1}{(1+x)^2},$$

$$y'''=\frac{2!}{(1+x)^3},$$

$$y^{(4)}=-\frac{3!}{(1+x)^4},$$

……

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\quad(n\ge 1, 0!=1).$$

补例 $(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax}$

$$(e^{ax})'=ae^{ax},\ (e^{ax})''=(ae^{ax})'=a^2e^{ax},\Lambda$$

补例 $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)'=-(x+a)^{-2},$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)''=[-(x+a)^{-2}]'=(-2)(-1)(x+a)^{-3},\Lambda$$

补例 $[\ln(x+a)]^{(n)}=(-1)^{(n-1)}\frac{(n-1)!}{(x+a)^n}$

$$[\ln(x+a)]'=\frac{1}{x+a},\ [\ln(x+a)]^{(n)}=\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n-1)},$$

例4 $y = \sin x, \quad (y)^{(2006)} = -\sin x$

$y' = \cos x,$

$y'' = -\sin x,$

$y''' = -\cos x,$

$y^{(4)} = \sin x,$

$(\sin x)^{(n)} =$

$$y'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2}),$$

$$y''=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$y'''=\cos(x+2\cdot\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2}),$$

一般地，可得

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2}),$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

类似可得

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

例5 求 $y=\sin kx$ ，求 $y^{(n)}$.

解 $y'=k\cos kx=k\sin\left(kx+\frac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=(y')'=k^2\cos\left(kx+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=k^2\sin\left(kx+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=k^2\sin\left(kx+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=(y'')'=k^3\cos\left(kx+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y' = k\cos kx = k\sin\left(kx + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (y')' = k^2\sin\left(kx + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = (y'')' = k^3\cos\left(kx + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$\wedge\ \wedge$

$$y^{(n)} = k^n\sin\left(kx + n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

即 $$(\sin kx)^{(n)} = k^n\sin\left(kx + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

同理可得 $$(\cos kx)^{(n)} = k^n\cos\left(kx + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

• 几个 *n* 阶导数公式

$$(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$[\ln(x+a)]^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{(x+a)^n}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

• *n* 阶导数的线性性质

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}; \quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

例6　设$y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$，求$y^{(5)}$.

解　$\Theta\ y = \dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$

$$\therefore y^{(5)} = \frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6} - \frac{-5!}{(x+1)^6}\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{(x+1)^6} - \frac{1}{(x-1)^6}\right]$$

思考题1

$$y=\frac{x^{2006}}{x^2-1}, \text{求 } y^{(2006)}.$$

解题提示:

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+\Lambda+a+1)$$

$$\frac{x^{2006}-1}{x^2-1}=x^{2004}+x^{2002}+\Lambda+x^2+1$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})$$

思考题2

设 $g'(x)$连续，且 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$，求 $f''(a)$.

解 $\Theta\ g(x)$ 可导

$\therefore\ f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$

$\Theta\ g''(x)$不一定存在, 故用定义求 $f''(a)$

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a} \qquad f'(a)=0$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}[2g(x)+(x-a)g'(x)]=2g(a)$$

思考题3

已知 $f^{(n)}(x)=g(x)$, 则 $f^{(n)}(ax+b)=g(ax+b)$,

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)=a^n g(ax+b).$$

推导: $[f(ax+b)]'=f'(ax+b)\cdot(ax+b)'=af'(ax+b)$,

$$[f(ax+b)]''=[af'(ax+b)]'$$

$$=af''(ax+b)\cdot(ax+b)'=a^2 f''(ax+b),$$

ΛΛ

$$[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b).$$

提示: $f(x)=e^x$, $f^{(n)}(x)=e^x$, 则

$$f^{(n)}(ax)=e^{ax},\quad [f(ax)]^{(n)}=(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax},$$

即 $[f(ax)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax)$

思考题3

已知 $f^{(n)}(x)=g(x)$, 则$f^{(n)}(ax+b)=g(ax+b)$,

$[f(ax+b)]^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)=a^n g(ax+b)$.

例如　由 $(e^x)^{(n)}=e^x$,

得 $(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax}$.

由 $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$,

得 $[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$.

由 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$,

得 $[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos(ax+b+n\cdot\frac{\pi}{2})$.

思考题4

设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求$y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

作 业

习题2–4 (P106):

1.单号

6.(2)