§2.2 函数的求导法则

一、函数的和、差、积、商的求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导法则与导数公式

一、函数的和、差、积、商的求导法则

❖定理1

如果函数$u=u(x)$及 $v=v(x)$在点x具有导数, 那么它们的和、差、积、商(除分母为零的点外)都在点 x 具有导数,且有

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x);$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

求导法则: $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

•乘法公式的推导:

$$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta v\right)=u'v+uv'.$$

•求导法则的推广

$$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w',$$

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

•特殊情况

$$(Cu)'=Cu'.$$

求导法则: $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

例1 $f(x)=x^3+4\cos x-\sin\frac{\pi}{2}$，求 $f'(x)$及 $f'(\frac{\pi}{2})$.

解 $f'(x)=(x^3)'+(4\cos x)'-(\sin\frac{\pi}{2})'=3x^2-4\sin x$,

$f'(\frac{\pi}{2})=\frac{3}{4}\pi^2-4$.

例2 $y=e^x(\sin x+\cos x)$，求y'.

解 $y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$.

求导法则: $(u\pm v)'=u'\pm v'$, $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

例3 $y=\tan x$, 求y'.

解 $$y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

例4 $y=\sec x$, 求y'.

解 $$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{(1)'\cos x-1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

用类似方法,还可求得:

$$(\cot x)'=-\csc^2 x,\quad (\csc x)'=-\csc x\cot x.$$

二、反函数的求导法则

❖定理2

如果函数 $x=f(y)$ 在某区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$, 那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_x=f(I_y)$ 内也可导, 且有

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)} \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

简要证明

由于 $x=f(y)$ 可导(从而连续), 所以 $x=f(y)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 连续. 当 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y\to 0$, 所以

$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}.$$

例5　求$(\arcsin x)'$及$(\arccos x)'$.

解　因为 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，所以

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

类似地有：$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

例6　求$(\arctan x)'$及$(\operatorname{arccot} x)'$.

解　因为 $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 的反函数，所以

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

类似地有：$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

三、复合函数的求导法则

❖定理3

如果 $u=g(x)$ 在点 x 可导, 函数 $y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 可导, 则复合函数 $y=f[g(x)]$ 在点 x 可导, 且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x) \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

简要证明

假定 $u=g(x)$在 x_0 的某去心邻域内不等于 $g(x_0)$, 则 $\Delta u\neq 0$, 此时有

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)g'(x).$$

例7 $y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

解 函数 $y=\sin\dfrac{2x}{1+x^2}$ 是由 $y=\sin u$，$u=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 复合而成的,

因此 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos u\cdot\frac{2(1+x^2)-(2x)^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}.$$

以上计算过程可写为:

$$\frac{dy}{dx}=(\sin\frac{2x}{1+x^2})'=\cos\frac{2x}{1+x^2}(\frac{2x}{1+x^2})'$$

$$=\cos\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\cdot\cos\frac{2x}{1+x^2}.$$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ 或 $y'(x)=f'(u)\cdot g'(x)$，其中 $y=f(u)$, $u=g(x)$.

注: 由 $(\sin x)'=\cos x$, 得 $[\sin u(x)]'=\cos u(x)\cdot u'(x)$.

$$(\sin\frac{2x}{1+x^2})'=\cos\frac{2x}{1+x^2}(\frac{2x}{1+x^2})'$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$ 或 $y'(x)=f'(u)\cdot g'(x)$，其中 $y=f(u)$, $u=g(x)$.

注: 由 $(\sin x)'=\cos x$， 得 $[\sin u(x)]'=\cos u(x)\cdot u'(x)$.

由 $(\cos x)'=-\sin x$， 得 $[\cos u(x)]'=-\sin u(x)\cdot u'(x)$.

由 $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$， 得 $[\sqrt{u(x)}]'=\dfrac{1}{2\sqrt{u(x)}}\cdot u'(x)$.

由 $(\dfrac{1}{x})'=-\dfrac{1}{x^2}$， 得 $[\dfrac{1}{u(x)}]'=-\dfrac{1}{[u(x)]^2}\cdot u'(x)$.

由 $(e^x)'=e^x$， 得 $[e^{u(x)}]'=e^{u(x)}\cdot u'(x)$.

由 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$， 得 $[\ln u(x)]'=\dfrac{1}{u(x)}\cdot u'(x)$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$ 或 $y'(x)=f'(u)\cdot g'(x)$，其中 $y=f(u)$, $u=g(x)$.

例8 $y=\ln\cos(e^x)$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=[\ln\cos(e^x)]'=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot[\cos(e^x)]'$$

$$=\frac{1}{\cos(e^x)}\cdot[-\sin(e^x)]\cdot(e^x)'=-e^x\tan(e^x).$$

例9 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 $$\frac{dy}{dx}=(e^{\sin\frac{1}{x}})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'$$

$$=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

四、基本求导法则与导数公式

•基本初等函数的导数公式

(1) $(C)'=0$,

(2) $(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$,

(3) $(\sin x)'=\cos x$,

(4) $(\cos x)'=-\sin x$,

(5) $(\tan x)'=\sec^2 x$,

(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$,

(7) $(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$,

(8) $(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$,

(9) $(a^x)'=a^x\ln a$,

(10) $(e^x)'=e^x$,

(11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$,

(12) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$,

(13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

(15) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$,

(16) $(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

四、基本求导法则与导数公式

• 函数的和、差、积、商的求导法则

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$,

(2) $(Cu)' = Cu'$ (C是常数),

(3) $(uv)' = u'v + uv'$,

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

• 反函数求导法

则

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad (f'(y) \neq 0).$$ 其中 $y = f^{-1}(x)$

• 复合函数的求导法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$ 或 $y'(x) = f'(u) \cdot g'(x)$, 其中 $y = f(u)$, $u = g(x)$.

例10　求$y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$的导数.

解　$y'=[\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})]'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(x+\sqrt{x^2+a^2})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot(x^2+a^2)']$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot 2x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

练习题 求下列函数的导数:

(1) $y=(2\sin x+\frac{1}{x})^4$; $\quad y'=4(2\sin x+\frac{1}{x})^3(2\cos x-\frac{1}{x^2})$;

(2) $y=\ln\cos\frac{1}{x}$; $\quad y'=\frac{1}{x^2}\tan\frac{1}{x}$;

(3) $y=\sqrt{\ln^2 x+1}$; $\quad y'=\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln^2 x+1}}$;

(4) $y=x^2e^{-x}$; $\quad y'=(2x-x^2)e^{-x}$;

(5) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$; $\quad y'=\arcsin x$;

(6) $y=\sin^2\frac{x-1}{x+1}$. $\quad y'=\frac{2}{(x+1)^2}\sin\frac{2(x-1)}{x+1}$.

例11 设 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ \ln x, & x\geq 1 \end{cases}$，求$f'(x)$.

解 当$x<1$时，$f'(x)=1$，

$$\frac{\ln x}{x-1}=\frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1}$$

当$x>1$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，

当$x=1$时，

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)-\ln 1}{x-1}=\mathbf{1},$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\mathbf{1},$$

$\therefore\quad f'(1)=1.\qquad \therefore\quad f'(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}.$

例12 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

求 $f'(x)$,并讨论其连续性

解 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

$x=0$为$f'(x)$的振荡间断点,

$f'(x)$在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$内连续.

思考题1

设 $f(x)=g(x)(x^2-a^2)$，$g(x)$ 在点 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$.

解

$$f'(x)=g'(x)(x^2-a^2)+2xg(x)$$

$$f'(a)=g'(a)(a^2-a^2)+2ag(a)$$

$$=2ag(a).$$

以上解答是否正确？

思考题2 设 $f(x)=\begin{cases} x+a, & x<1 \\ \ln x, & x\geq 1 \end{cases}$，求$f'(x)$.

解 当 $x<1$时，$f'(x)=1$,

当 $x>1$时，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$,

$\Theta \quad \lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=1$,

$\therefore \quad f'(1)=1$.

$\therefore \quad f'(x)=\begin{cases} 1, & x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$.

以上解答是否正确？

作 业

习题2–2 (P97):

1. 单号
4. （1） (2) (3) (4) (5)
5. (3) (4) (5) (6)