§1.8 极限存在准则　两个重要极限

一、准则I及第一个重要极限

二、准则II及第二个重要极限

一、准则I 及第一个重要极限

❖准则 I [夹逼准则]

如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

那么数列$\{x_n\}$的极限存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n}$.

解 $\Theta \quad 5 < \sqrt[n]{3^n+4^n+5^n} < 5\sqrt[n]{3}$,

而 $\lim\limits_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{3} = 5$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+4^n+5^n} = 5$.

一、准则I 及第一个重要极限

❖准则 I [夹逼准则]

如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

(1)$y_n \le x_n \le z_n (n=1, 2, 3, \cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

❖准则I′ [夹逼准则]

如果函数$f(x)$、$g(x)$及$h(x)$满足下列条件:

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2)$\lim g(x)=A$, $\lim h(x)=A$,

那么$\lim f(x)$存在，且$\lim f(x)=A$.

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\Lambda+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$

解 Θ $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\Lambda+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$

由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\Lambda+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

例 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

解 由 $\dfrac{n!}{n^n}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\Lambda\ n}{n\cdot n\cdot n\Lambda\ n}<\dfrac{1\cdot 2\cdot n\cdot n\Lambda\ n}{n\cdot n\cdot n\Lambda\ n}=\dfrac{2}{n^2}$,

易见 $0<\dfrac{n!}{n^n}\le\dfrac{2}{n^2}$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}=0$.

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^2}=0.$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$.

解　因为

$$0<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2},$$

故由准则 I，得

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

❖第一个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

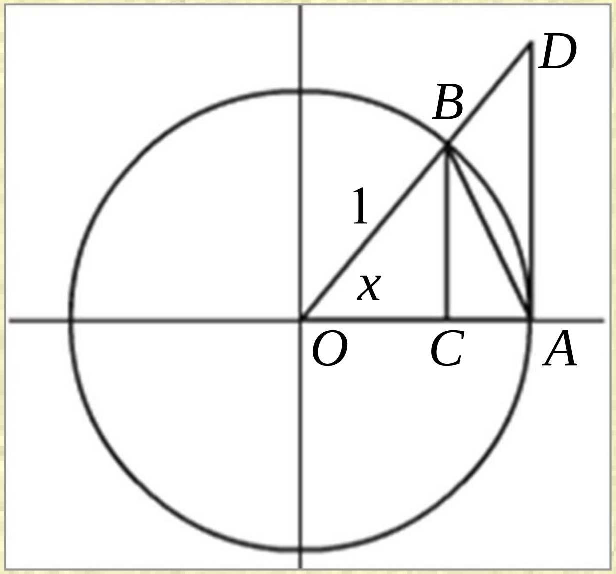
简要证明 参看附图, 设圆心角 $\angle AOB=x$ $(0<x<\frac{\pi}{2})$.

显然 $BC<\overset{\frown}{AB}<AD$, 因此 $\sin x<x<\tan x$,

从而 $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ (此不等式当 $x<0$ 时也成立).

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$,

根据准则 I′, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.



❖第一个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

注：(1) 一个重要不等式

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时， $\sin x<x<\tan x.$

(2) 推广形式

$$\lim\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1 \quad [\alpha(x)\to 0].$$

这是因为，令$u=\alpha(x)$，则$u\to 0$，于是

$$\lim\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1\,(\alpha(x)\to 0).$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

二、准则II及第二个重要极限

❖准则II

单调有界数列必有极限.

提问:

收敛的数列是否一定有界?

有界的数列是否一定收敛?

注:

如果$x_n \le x_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^+$, 就称数列$\{x_n\}$是单调增加的.

如果$x_n \ge x_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^+$, 就称数列$\{x_n\}$是单调减少的.

单调增加和单调减少数列统称为单调数列.

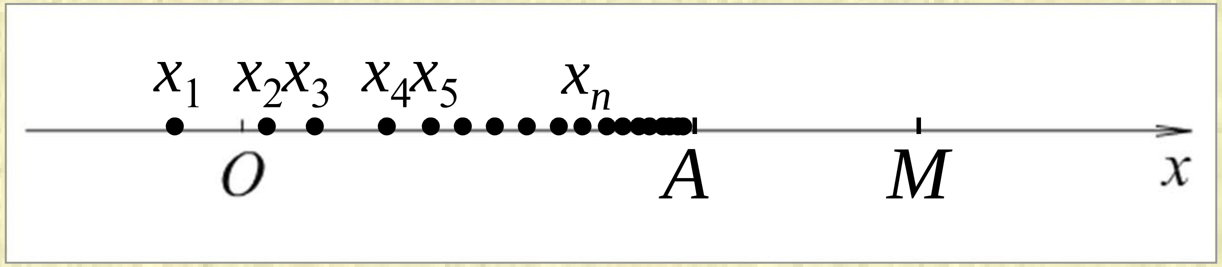
二、准则II及第二个重要极限

❖准则II

单调有界数列必有极限.

•准则II的几何解释

以单调增加数列为例，数列的点只可能向右一个方向移动，或者无限向右移动，或者无限趋近于某一定点A，而对有界数列只可能后者情况发生.



❖**证明思路** 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.$

(1) 利用已知递推公式求出$A.$

(2) 若$x_1, x_2 < A,$ 往证数列$\{x_n\}$单调增加,且有上界$A.$

(3) 若$x_1, x_2 > A,$ 往证数列$\{x_n\}$单调减少,且有下界$A.$

例6 已知$x_0 = 1, x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}.$ 试证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在.

分析 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.$

由 $x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}$, 得 $A = \sqrt{3+2A}$, 求出$A = 3.$

$$x_1 = \sqrt{3+2x_0} = \sqrt{5} < 3 = A.$$

❖**证明思路** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A.$

(1) 利用已知递推公式求出 $A.$

(2) 若 $x_1, x_2 < A,$ 往证数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 且有上界 $A.$

(3) 若 $x_1, x_2 > A,$ 往证数列 $\{x_n\}$ 单调减少, 且有下界 $A.$

例6 已知 $x_0 = 1, x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}.$ 试证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

证明 $x_1 = \sqrt{3+2x_0} = \sqrt{5} < 3,$ 假设 $x_n < 3,$ 于是

$$x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n} < \sqrt{3+6} = 3,$$

由归纳原理证得 $\{x_n\}$ 有上界3.

$$x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n} > \sqrt{x_n + 2x_n} = \sqrt{3x_n} > x_n,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 且有上界3. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

二、准则II及第二个重要极限

❖准则II

单调有界数列必有极限.

❖第二个重要极限

设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$，可以证明(1)$x_n \le x_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}^+$, (2)$x_n<3$.

根据准则II，数列$\{x_n\}$必有极限, 此极限用e来表示, 即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\ .$$

e是个无理数，它的值是

$$e=2.718281828459045\cdots.$$

二、准则II及第二个重要极限

❖准则II

单调有界数列必有极限.

❖第二个重要极限

设 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$，可以证明(1)$x_n\leq x_{n+1}$, $n\in\mathbf{N}^+$, (2)$x_n<3$.

根据准则II，数列$\{x_n\}$必有极限, 此极限用e来表示, 即

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\ .$$

我们还可以证明

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\ ,$$

这就是第二个重要极限.

二、准则II及第二个重要极限

❖准则II

单调有界数列必有极限.

❖第二个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e .$$

注：

在极限 $\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}$ 中，只要 $\alpha(x)$ 是无穷小，就有

$\lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e .$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x$.

解 令$t=-x$, 则$x\to\infty$时, $t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t})^t}=\frac{1}{e}.$$

或

$$\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x(-1)}$$

$$=[\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=e^{-1}.$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e\,,\quad \lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e\,(\alpha(x)\to 0).$$

❖配 e 法　设 $\lim u(x)=0, \lim v(x)=\infty$,则有

$$\lim(1+u)^v=\lim[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{uv}=e^{\lim uv}.$$

例8　求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[[1+(-2x)]^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-6}$$

$$=e^{-6}.$$

❖配 e 法 设 $\lim u(x)=0, \lim v(x)=\infty$,则有

$$\lim(1+u)^v=\lim[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{uv}=e^{\lim uv}.$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right]^{\frac{3x}{x-1}}$$

$$=\exp(\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x-1})=e^3.$$

$$\boxed{\exp(x)=e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e\,,\quad \lim[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e\,(\alpha(x)\to 0).$$

❖配 e 法 设 $\lim u(x)=0, \lim v(x)=\infty$, 则有

$$\lim(1+u)^v = \lim[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{uv} = e^{\lim uv}.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{4x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

$$\boxed{\frac{2x+1}{4x-1}-1=\frac{2-2x}{4x-1}}$$

解 $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x+1}{4x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{2-2x}{4x-1}\right)^{\frac{4x-1}{2-2x}}\right]^{-\frac{2}{4x-1}}$$

$$= \exp[\lim_{x\to 1}(-\frac{2}{4x-1})] = \exp(-\frac{2}{3}).$$

作 业

习题1–8 (P63):

1. (1) (2) (4) (5)

2. (1) (2) (3) (5)

•准则I

如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

(1)$y_n \le x_n \le z_n (n=1, 2, 3, \cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

简要证明 由条件(2)，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当$n>N$时，有

$$|y_n - a| < \varepsilon \text{ 及 } |z_n - a| < \varepsilon ,$$

即有 $a-\varepsilon < y_n < a+\varepsilon$, $a-\varepsilon < z_n < a+\varepsilon$,

由条件(1), 有 $a-\varepsilon < y_n \le x_n \le z_n < a+\varepsilon$,

即 $|x_n - a| < \varepsilon$.

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 单调性的证明:

按牛顿二项公式, 有

$$x_n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),$$

$$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})+$$

$$\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1}).$$

比较x_n, x_{n+1}的展开式, 可得 $x_n<x_{n+1}$.

数列 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 有界性证明:

按牛顿二项公式, 有

$$x_n=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3\,.$$