§1.7 极限运算法则

❖ 极限的四则运算法则

❖极限的四则运算法则

•定理3

如果 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$.

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$.

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

•推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 c 为常数, 则

$$\lim[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim f(x).$$

•推论2 如果 $\lim f(x)$ 存在, 而 n 是正整数, 则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

❖数列极限的四则运算法则

•**定理4** 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$. 如果

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = B,$$

那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = A \cdot B$;

(3)当 $y_n \neq 0$ $(n=1, 2, \cdots)$且 $B\neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$.

❖不等式

•**定理5** 如果$\varphi(x) \geq \psi(x)$, 而$\lim\varphi(x)=a$, $\lim\psi(x)=b$, 那么$a\geq b$.

❖求极限举例

例1　求 $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=\lim\limits_{x\to 1}2x-\lim\limits_{x\to 1}1=2\lim\limits_{x\to 1}x-1=2\cdot 1-1=1$.

•讨论　若 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=?$

•提示　$\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$.

例2　求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解　$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-5x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}=\dfrac{2^3-1}{2^2-10+3}=-\dfrac{7}{3}$.

例3 求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$.

解 $$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}=\frac{1}{6}.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{2x-3}=\dfrac{1^2-5\cdot 1+4}{2\cdot 1-3}=0$,

根据无穷大与无穷小的关系得

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty.$$

•讨论

有理函数的极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=?$

•提示

当 $Q(x_0)\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

当 $Q(x_0)=0$ 且 $P(x_0)\neq 0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\infty$.

当$Q(x_0)=P(x_0)=0$时，约去分子分母的公因式$(x-x_0)$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解 先用x^3去除分子及分母, 然后取极限:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{7+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}.$$

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}$.

解: 先用x^3去除分子及分母, 然后取极限:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}=\frac{0}{2}=0.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^3-x^2+5}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=\infty.$$

•讨论

有理函数的极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=?$

•提示

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}.$$

例8 计算$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$

解 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+4)-12}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}$$

例9　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解　当$x\to\infty$时, 分子及分母的极限都不存在, 故关于商的极限的运算法则不能应用.

因为 $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$, 是无穷小与有界函数的乘积,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

例10 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\Lambda+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 本题考虑无穷多个无穷小之和.

先变形再求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\Lambda+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\Lambda+n}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.$$

❖定理6(复合函数的极限运算法则)

设函数$y=f[g(x)]$是由函数$y=f(u)$与函数$u=g(x)$复合而成, $f[g(x)]$在点x_0的某去心邻域内有定义. 若$g(x)\to u_0(x\to x_0)$, $f(u)\to A(u\to u_0)$, 且在x_0的某去心邻域内$g(x)\neq u_0$, 则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

•说明

把定理中$g(x)\to u_0(x\to x_0)$换成$g(x)\to\infty(x\to x_0$或$x\to\infty)$, 而把$f(u)\to A(u\to u_0)$换成$f(u)\to A(u\to\infty)$可得类似结果.

❖定理6(复合函数的极限运算法则)

设函数$y=f[g(x)]$是由函数$y=f(u)$与函数$u=g(x)$复合而成，$f[g(x)]$在点x_0的某去心邻域内有定义．若$g(x)\to u_0(x\to x_0)$，$f(u)\to A(u\to u_0)$，且在x_0的某去心邻域内$g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=A.$$

例11 求$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$.

解 $y=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}$是由$y=\sqrt{u}$与$u=\dfrac{x^2-9}{x-3}$复合而成的.

因为$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$，所以$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-9}{x-3}}=\lim\limits_{u\to 6}\sqrt{u}=\sqrt{6}$.

例 12 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

$$=\cos\left[\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]$$

$$=\cos\left[\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right]$$

$$=\cos 0=1.$$

作 业

习题1–7 (P55):

1. (4) (5) (6) (10) (15) (16)(17)
2. (1) (4)

如果$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 那么

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B.$$

证明 因为$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,

根据极限与无穷小的关系, 有

$$f(x)=A+\alpha,\ \ g(x)=B+\beta,$$

其中α及β为无穷小. 于是

$$f(x)\pm g(x)=(A+\alpha)\pm(B+\beta)=(A\pm B)+(\alpha\pm\beta),$$

即$f(x)\pm g(x)$可表示为常数$(A\pm B)$与无穷小$(\alpha\pm\beta)$之和.

再根据极限与无穷小的关系得

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B.$$

如果$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$, 那么

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot \lim g(x)=A\cdot B.$$

证明　因为$\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,

根据极限与无穷小的关系, 有

$$f(x)=A+\alpha,\ \ g(x)=B+\beta,$$

其中α及β为无穷小. 于是

$$f(x)\,g(x)\ =(A+\alpha)(B+\beta)\ =AB+A\beta+\alpha B+\alpha\beta,$$

即$f(x)g(x)$可表示为常数AB与无穷小$A\beta+\alpha B+\alpha\beta$之和.

再根据极限与无穷小的关系得

$$\lim[f(x)g(x)]=AB.$$