§1.6 无穷小与无穷大

一、无穷小

二、无穷大

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$$

❖函数极限的$\varepsilon-\delta$定义

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当$0<|x-x_0|<\delta$时, 有$|[f(x)-A]-0|<\varepsilon$.

$\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=0$

一、无穷小

❖无穷小的定义

定义　**极限为零的变量(函数)称为无穷小.**

例1　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to\infty$时的无穷小.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$，所以数列$\{\dfrac{1}{n+1}\}$为当 $n\to\infty$时的无穷小.

因为$\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt{x-1}=0$，所以函数$\sqrt{x-1}$为当$x\to1^+$时的无穷小.

注意:　**(1) 无穷小是变量，不能与很小的数混淆.**

(2)　零是可以作为无穷小的唯一常数.

因为若 $f(x)\equiv 0$，　则对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总有 $|f(x)|<\varepsilon$.

一、无穷小

❖定理1 (无穷小与函数极限的关系)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha,$$ 其中 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

例如，因为 $\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x^3}$，而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^3}=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

提示：$f(x)=A+[f(x)-A]$, $\alpha=f(x)-A$.

无穷小的运算性质

定理1 在同一过程中，有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

证 设α及β是当$x \to \infty$时的两个无穷小，则$\forall \varepsilon > 0$，

$\exists N_1 > 0$，$N_2 > 0$，使得当$|x| > N_1$时恒有$|\alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；

当$|x| > N_2$时恒有$|\beta| < \dfrac{\varepsilon}{2}$；

取$N = \max\{N_1, N_2\}$，则当$|x| > N$时，恒有

$$|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\therefore \quad \alpha \pm \beta \to 0 (x \to \infty).$$

注意 无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小.

例如，$x \to \infty$时，$\dfrac{1}{n}$是无穷小，但n个$\dfrac{1}{n}$之和为1，不是无穷小.

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证 设函数 u 在 $\mathring{U}(x_0,\delta_1)$ 内有界，则 $\exists M>0$, $\delta_1>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，恒有 $|u|\le M$.

又设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_2>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，恒有 $|\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{M}$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时，$u\cdot\alpha$ 为无穷小.

定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论1 同一过程中, 有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论2 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论3 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

例如 当 $x \to 0$ 时, 变量 $x\sin\frac{1}{x}$, $x^2\arctan\frac{1}{x}$ 都是无穷小.

例 1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\sin x$

而当 $x\to\infty$ 时, $\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量,

$\sin x$ 是有界量 $(|\sin x|\le 1)$,

所以, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

❖无穷小的性质

- 定理1 有限个无穷小的和也是无穷小.
- 定理2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.
- 推论1 常数与无穷小的乘积是无穷小.
- 推论2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

二、无穷大

❖无穷大的定义

如果当$x \to a$时，$|f(x)|$无限增大，那么称函数$f(x)$为当$x \to a$时的无穷大，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$ [形式记法,实际上极限不存在]

说明:

当$x \to a$时为无穷大的函数$f(x)$，按函数极限定义来说，极限是不存在的．但为了便于叙述函数的这一性态，我们也说"函数的极限是无穷大"．

二、 无穷大

❖无穷大的定义

如果当$x \to a$时，$|f(x)|$无限增大，那么称函数$f(x)$为当$x \to a$时的无穷大，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$ ［形式记法,实际上极限不存在］

❖无穷大的精确定义

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0,\ \exists \delta > 0,\ \text{当}\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \text{时,有}\ |f(x)| > M.$$

• 正无穷大与负无穷大

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,\quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}=\infty.$

证 $\forall M>0$, 要使 $\left|\dfrac{1}{x-1}\right|>M$, 只要

$$|x-1|<\frac{1}{M},$$

取 $\delta=\dfrac{1}{M}$, 则当$0<|x-1|<\delta=\dfrac{1}{M}$时, 就有

$$\left|\frac{1}{x-1}\right|>M.$$

所以

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty.$$

无穷小与无穷大的关系

定理 在**自变量变化的同一变化过程**中，无穷大的**倒数**为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $\forall \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时恒有 $|f(x)|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon.$

$\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

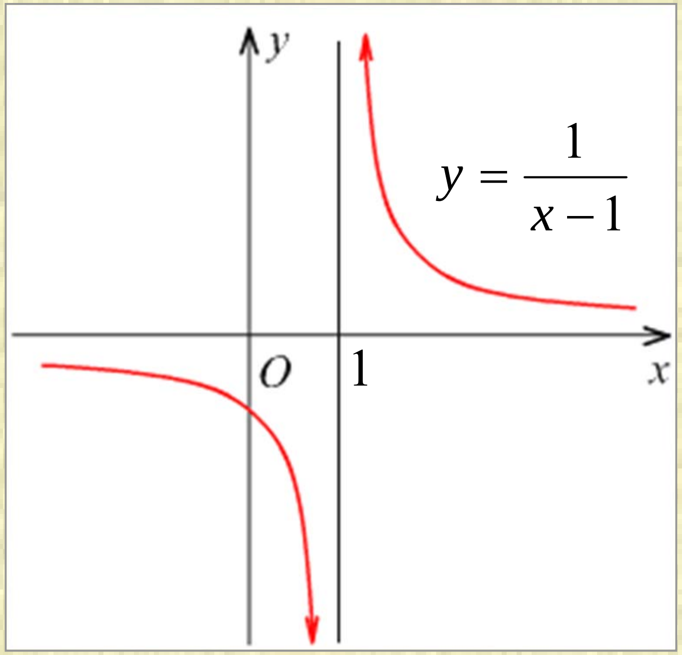
反之，设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，且 $f(x)\neq 0$，$\therefore\ \forall M>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)|<\dfrac{1}{M}$，

意义 无穷大的讨论可归结为关于无穷小的讨论.

定理 在自变量变化的同一变化过程中，无穷大的倒数为无穷小；恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

例如 因为$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,

所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x-1}=\infty$.



例3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{x^3+5}$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^4})=0$

根据无穷小与无穷大的关系有

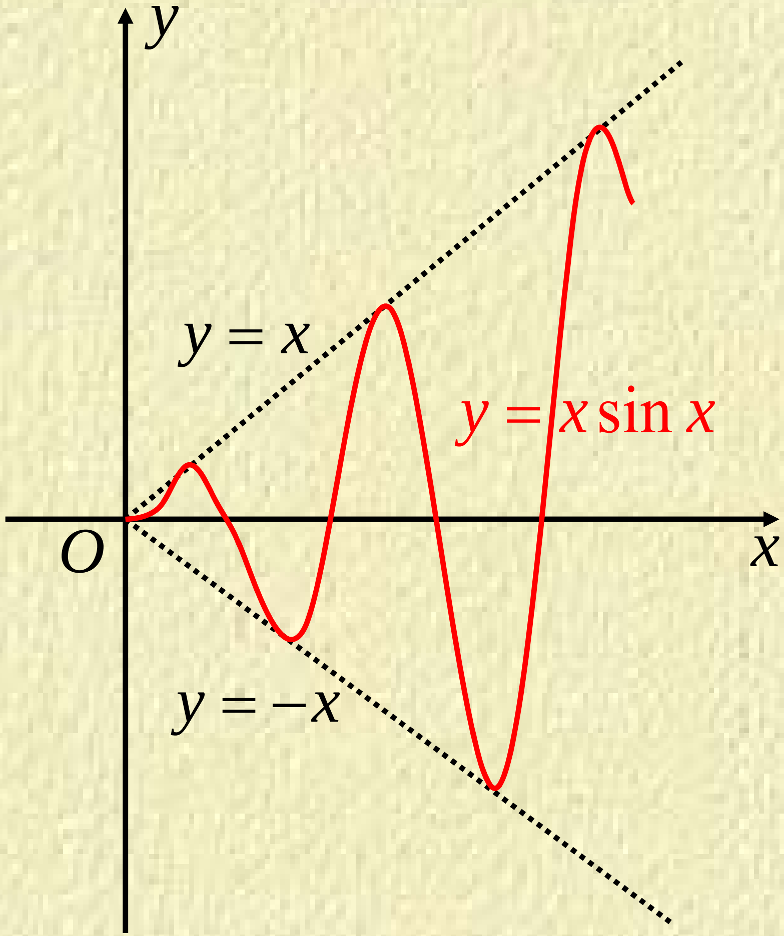
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^3+5}=\infty.$$

练习：P51 1.

❖无穷大与无界之间的关系

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $f(x)$ 无界. 反之不然.

例如　当 $x \to +\infty$ 时，函数 $y = x\sin x$ 是无界的，但不是无穷大.



(1) 设 $\{x_n \in I\}$, 如果有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$,

则 $f(x)$ 在区间 I 中无界.

(2) 设 $x_n \neq a$, 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. 如果 $f(x_n)$ 为有界数列,

则当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 不是无穷大.

(1) 的简证 $\forall M > 0$, Θ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$,

所以当 n 足够大时, 有 $|f(x_n)| > M$.

(2) 的简证 用反证法.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty \ (\forall x_n \to a)$$

$\Rightarrow$ 数列$\{f(x_n)\}$无界.

(1) 设 $\{x_n \in I\}$, 如果有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$,

则 $f(x)$ 在区间 I 中无界.

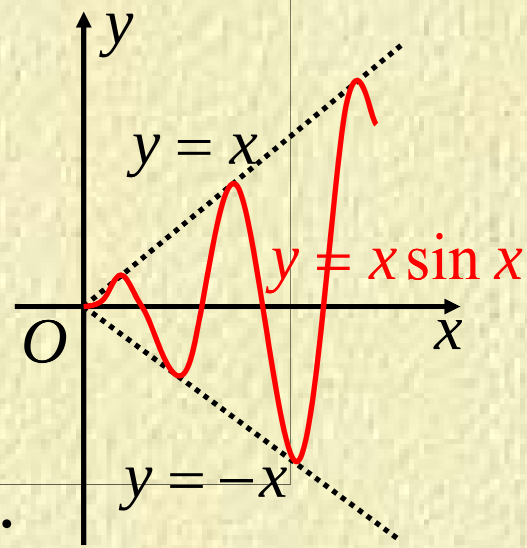
(2) 设 $x_n \neq a$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 如果 $f(x_n)$ 为有界数列,

则当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 不是无穷大.

例4 函数 $y = x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界?又当 $x \to +\infty$ 时, 这个函数是否为无穷大?为什么?

解 取 $x_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$,

$$y(x_n) = x_n \sin x_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2},$$



显然 $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n) = \infty$,

所以函数 $y = x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

(1) 设 $\{x_n \in I\}$, 如果有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$,

则 $f(x)$ 在区间 I 中无界.

(2) 设 $x_n \neq a$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 如果 $f(x_n)$ 为有界数列,

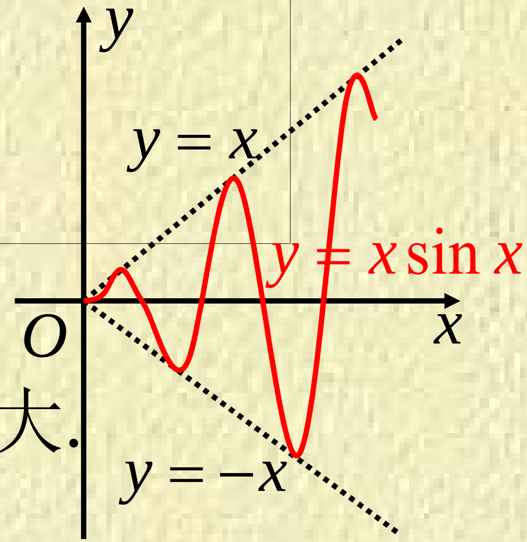
则当 $x \to a$ 时, $f(x)$ 不是无穷大.

例4 函数 $y = x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界?又当 $x \to +\infty$ 时, 这个函数是否为无穷大?为什么?

解 取 $x'_n = n\pi$, $y(x'_n) = x'_n \sin x'_n = 0$,

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = +\infty$, 且 $\{y(x'_n)\}$ 为有界数列,

所以当 $x \to +\infty$ 时, $y = x\sin x$ 不是无穷大.



作 业

习题1–6 (P51):

2.

5.