§ 1.5 函数的极限

一、函数极限的定义

二、函数极限的性质

一、函数极限的定义

1. 自变量趋于有限值时函数的极限

❖函数极限的通俗定义

如果当x无限地接近于x_0时，函数$f(x)$的值无限地接近于常数A，则常数A就叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(\text{当 } x \to x_0).$$

分析:

当$x \to x_0$时，$f(x) \to A$.

$\Leftrightarrow$当$|x-x_0| \to 0$时，$|f(x)-A| \to 0$.

$\Leftrightarrow$当$|x-x_0|$变得足够小时，$|f(x)-A|$能小于任意给定的正数ε.

注: 当$x \to x_0$时，$x \neq x_0$.

❖函数极限的精确定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数A, 对于任意给定的正数ε, 总存在正数δ, 使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时, 对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

当$x\to x_0$时, $f(x)\to A$.

$\Leftrightarrow$当$|x-x_0|\to 0$时, $|f(x)-A|\to 0$.

$\Leftrightarrow$当$|x-x_0|$变得足够小时, $|f(x)-A|$能小于任意给定的正数ε.

注: 当$x\to x_0$时, $x \neq x_0$.

❖函数极限的精确定义

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数A, 对于任意给定的正数ε, 总存在正数δ, 使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时, 对应的函数值$f(x)$都满足不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0).$$

•定义的简记形式

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \text{当}0<|x-x_0|<\delta\text{时, 有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

注: 当$x\to x_0$时, x $\overline{x}_0$.

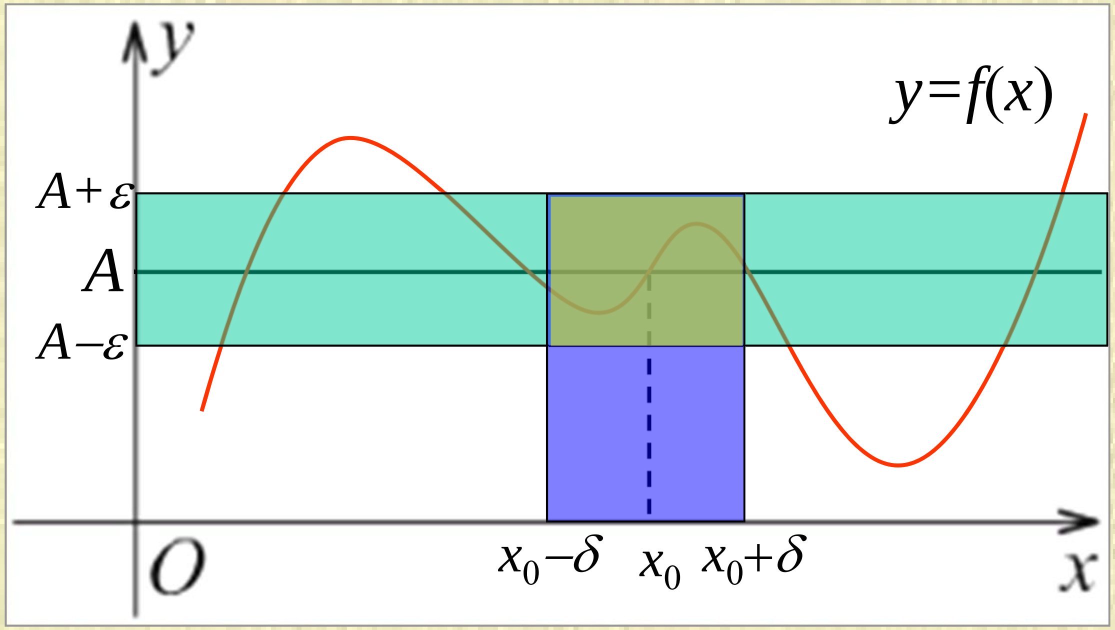
❖函数极限的几何意义

$\forall\varepsilon>0$:

$\exists\delta>0$:

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$|f(x)-A|<\varepsilon$:



注: δ 与 ε 有关, 但不唯一.

确定 δ 时, δ 越小越合适.

例1 证明 $\lim_{x \to 1}(2x-1) = 1$.

证明 因为 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon/2$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时，有

$$|f(x) - A| = |(2x-1) - 1| = 2|x-1| < \varepsilon,$$

所以 $\lim_{x \to 1}(2x-1) = 1$.

分析:

$$|f(x) - A| = |(2x-1) - 1| = 2|x-1|.$$

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 只要 $|x-1| < \varepsilon/2$.

例2 证明 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x)=2.$

提示：当 $x\in I=(x_1,x_2)$时，有 $|x^2+x-2|<\varepsilon$ 相关问题

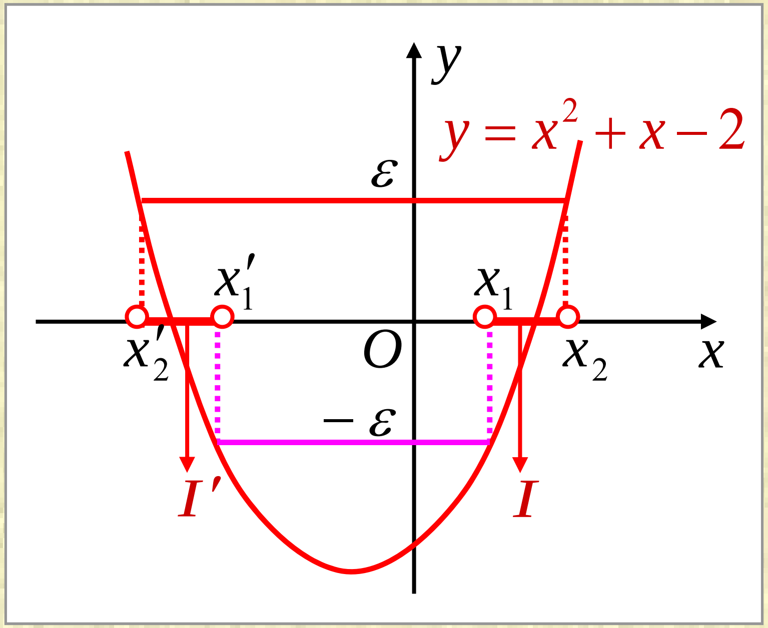
分析：解题目标：

$\forall\varepsilon>0$, 取一 $\delta>0$, 使 当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $|x^2+x-2|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow$

目标：$\forall\varepsilon>0$, 取一 $\delta>0$, 使 $(1-\delta,1+\delta)\subset I=(x_1,x_2)$

即 $(1-\delta,1+\delta)$ 包含于不等式 $|x^2+x-2|<\varepsilon$ 的解集内



例2 证明 $\lim_{x\to 1}(x^2+x)=2.$

提示：当 $x\in I=(x_1,x_2)$ 时，有 $|x^2+x-2|<\varepsilon$

分析：要 $(1-\delta,1+\delta)\subset I$

目标：$\forall\varepsilon>0$, 取一 $\delta>0$, 使 $(1-\delta,1+\delta)\subset I=(x_1,x_2)$

即要 $\begin{cases}1-\delta\ge x_1\\1+\delta\le x_2\end{cases}$

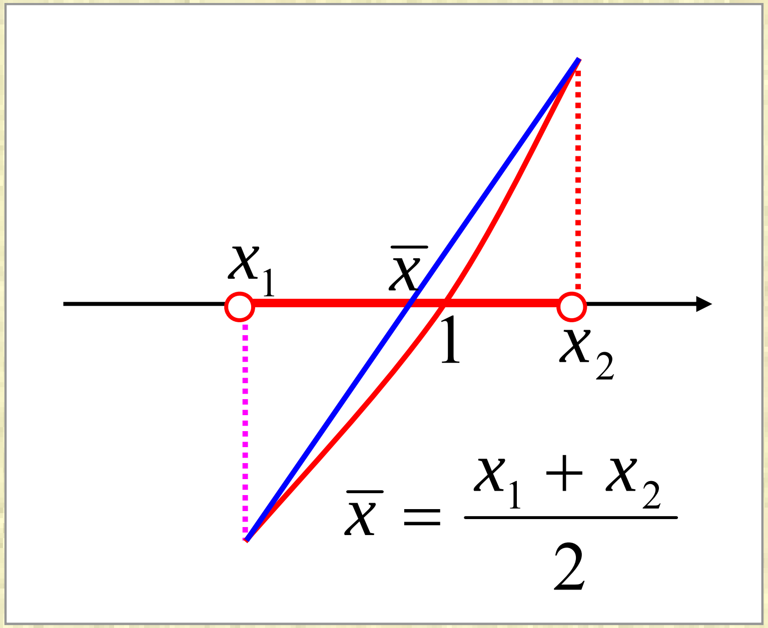
因此 δ 的最大值为

$$\delta_{\max}=\min\{1-x_1, x_2-1\}$$

可以判断 $x_2-1<1-x_1$ 推算

因此 $\delta\le\delta_{\max}=x_2-1$

$$\delta\le\delta_{\max}=\frac{\sqrt{9+4\varepsilon}-3}{2}$$



例2 证明 $\lim_{x\to 1}(x^2+x)=2.$

提示：当 $x\in I=(x_1,x_2)$ 时，有

$$|x^2+x-2|<\varepsilon$$

目标：$\forall\varepsilon>0,$ 取一 $\delta>0,$ 使

$$(1-\delta,1+\delta)\subset I=(x_1,x_2)$$

证一 $\forall\varepsilon>0,$

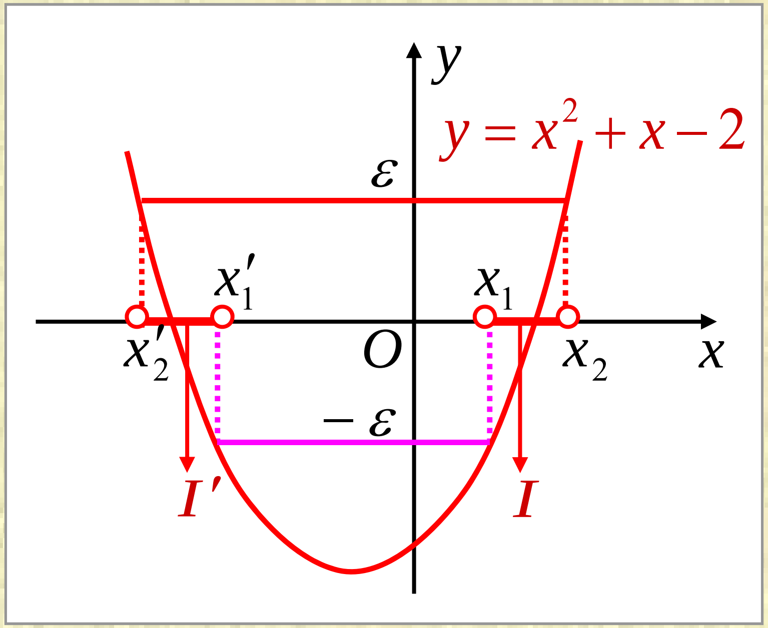
取 $\delta=\dfrac{\sqrt{9+4\varepsilon}-3}{2},$

当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$|x^2+x-2|<\varepsilon.$$

因此 $\lim_{x\to 1}(x^2+x)=2.$

$$\delta\le\delta_{\max}=\frac{\sqrt{9+4\varepsilon}-3}{2}$$



例2 证明 $\lim_{x\to 1}(x^2+x)=2$.

证二 因 $x\to 1$, 可设 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$,

$$|f(x)-2|=|x^2+x-2|=|x+2||x-1|<4|x-1|$$

$\forall\varepsilon>0$, 要 $|f(x)-2|<\varepsilon$, 只要 $4|x-1|<\varepsilon$

取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{4}\}$, 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有

$$|x^2+x-2|<4|x-1|<4\delta\le\varepsilon$$

因此 $\lim_{x\to 1}(x^2+x)=2$.

注: δ 与 ε 有关, 但不唯一. 确定 δ 时, δ 越小越合适.

例2　证明 $\lim_{x\to 1}(x^2+x)=2.$

证三　因 $x\to 1,$ 可设 $|x-1|<1,$ 即 $0<x<2,$

$$|f(x)-2|=|x^2+x-2|=|x+2||x-1|<4|x-1|$$

$\forall\varepsilon>0,$ 要 $|f(x)-2|<\varepsilon,$ 只要 $4|x-1|<\varepsilon$

取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{4}\},$ 当 $0<|x-1|<\delta$ 时, 有

$$|x^2+x-2|<4|x-1|<4\delta\le\varepsilon$$

因此　$\lim_{x\to 1}(x^2+x)=2.$

注: δ 与 ε 有关, 但不唯一. 确定 δ 时, δ 越小越合适.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

❖单侧极限

若当$x\to x_0^-$时，$f(x)$无限接近于某常数A, 则常数A叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或} f(x_0^-)=A .$$

•精确定义

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0, \text{当} x_0-\delta<x<x_0, \text{有}|f(x)-A|<\varepsilon .$$

注:

$x\to x_0^-$表示x从x_0的左侧(即小于x_0)趋于x_0 ,

$x\to x_0^+$表示x从x_0的右侧(即大于x_0)趋于x_0 .

❖单侧极限

若当$x\to x_0^-$时，$f(x)$无限接近于某常数A, 则常数A叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A\,.$$

•精确定义

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \text{当} x_0-\delta<x<x_0, \text{有} |f(x)-A|<\varepsilon\,.$$

类似地可定义右极限.

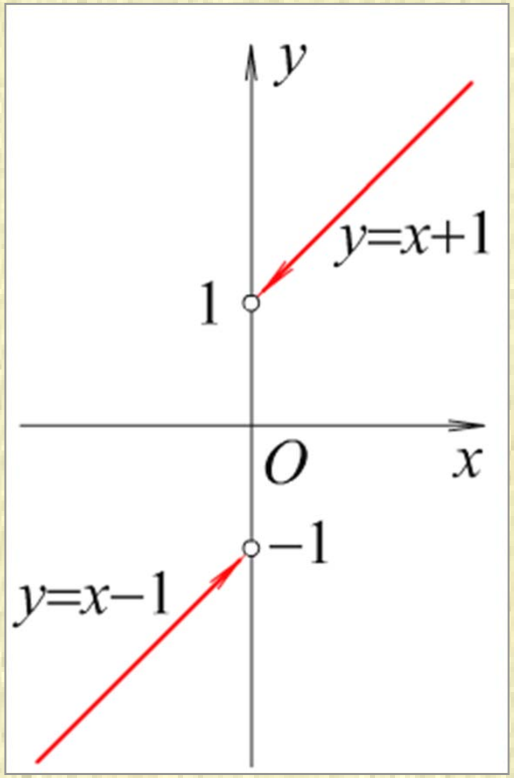
•结论

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A\,.$$

例3 函数

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$$

当$x\to 0$时的极限不存在.



这是因为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

2. 自变量趋于无穷大时函数的极限

如果当$|x|$无限增大时，$f(x)$无限接近于某一常数A，则常数A叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

•精确定义

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists X>0,\ \text{当}|x|>X\text{时，有}|f(x)-A|<\varepsilon.$$

类似地可定义

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 和 } \lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

•结论

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

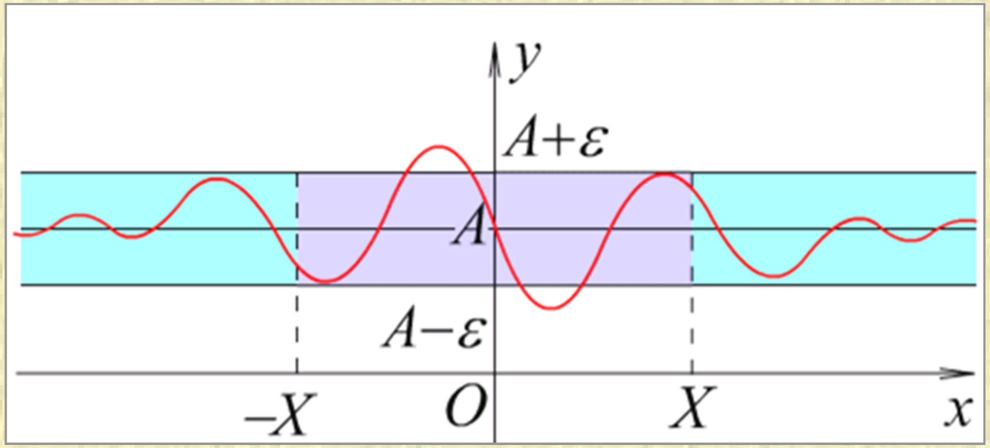
$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists X>0$, 当$|x|>X$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

❖几何意义

$\forall \varepsilon>0$:

$\exists X>0$:

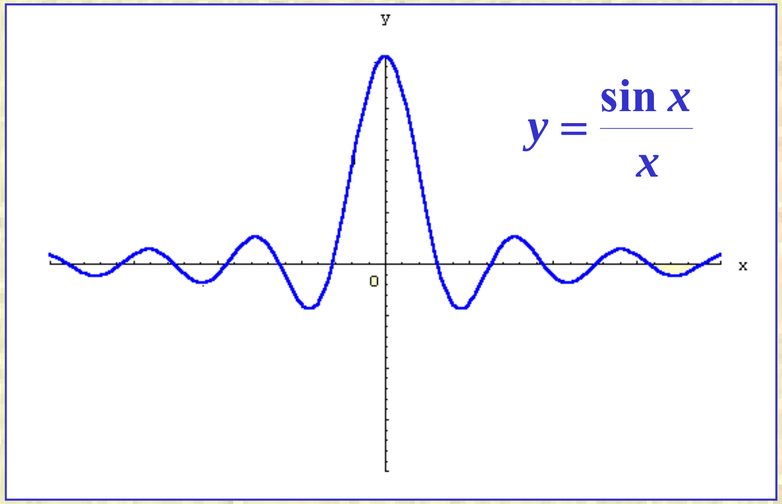
当$|x|>X$时, 有$|f(x)-A|<\varepsilon$:



•水平渐近线

如果$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$, 则直线$y=A$称为函数$y=f(x)$的图形的水平渐近线.

注: X与ε有关, 但不唯一. 确定X时, X越大越合适.



例4 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$

证明 $\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{1}{|x|}$

$\forall\varepsilon>0$, 取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $|x|>X$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|<\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$

注: X 与 ε 有关, 但不唯一. 确定 X 时, X 越大越合适.

例5 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)=0.$

证明 $|f(x)-0|=|\sqrt{x^2+4}-x|=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}+x}<\dfrac{2}{x}$

$\forall\varepsilon>0,$ 要 $|f(x)-0|<\varepsilon,$ 只要 $\dfrac{2}{x}<\varepsilon,$ 即 $x>\dfrac{2}{\varepsilon}.$

取 $X=\dfrac{2}{\varepsilon},$ 当 $x>X$ 时, 有 $|(\sqrt{x^2+4}-x)-0|<\varepsilon.$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)=0.$

注: X 与 ε 有关, 但不唯一. 确定 X 时, X 越大越合适.

二、函数极限的性质

❖定理1（函数极限的唯一性）

如果当$x\to x_0$时$f(x)$的极限存在，那么这极限是唯一的.

❖定理2（函数极限的局部有界性）

如果$f(x)\to A(x\to x_0)$，那么$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有界.

❖定理3（函数极限的局部保号性）

如果$f(x)\to A(x\to x_0)$，而且$A>0$(或$A<0$)，那么在x_0的某一去心邻域内，有$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

•推论

如果在x_0的某一去心邻域内$f(x)\geq 0$(或$f(x)\leq 0$)，而且$f(x)\to A(x\to x_0)$，那么$A\geq 0$(或$A\leq 0$).

❖定理4(函数极限与数列极限的关系)

如果当$x \to x_0$时$f(x)$的极限存在, $\{x_n\}$为$f(x)$的定义域内任一收敛于x_0的数列, 且满足 $x_n \neq x_0 (n \in N^+)$, 那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛, 且

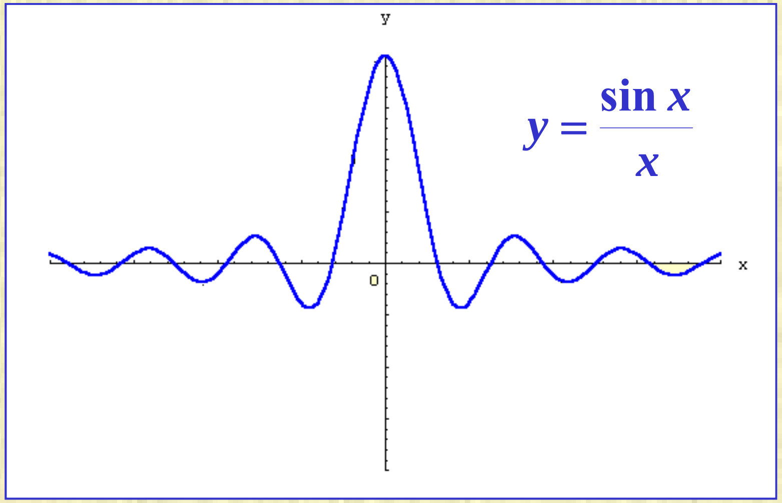
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

例如, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

$$\lim_{n \to \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = 1,$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n+1} \sin \frac{n+1}{n^2} = 1.$$



作 业

习题1–5 (P46):

4.(1)　　(3)

相关问题 解不等式 $|x^2+x-2|<\varepsilon,\ (0<\varepsilon<1)$.

解 $x^2+x-2=\varepsilon$ 的根为

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{9+4\varepsilon}}{2},\quad x_2'=\frac{-1-\sqrt{9+4\varepsilon}}{2}$$

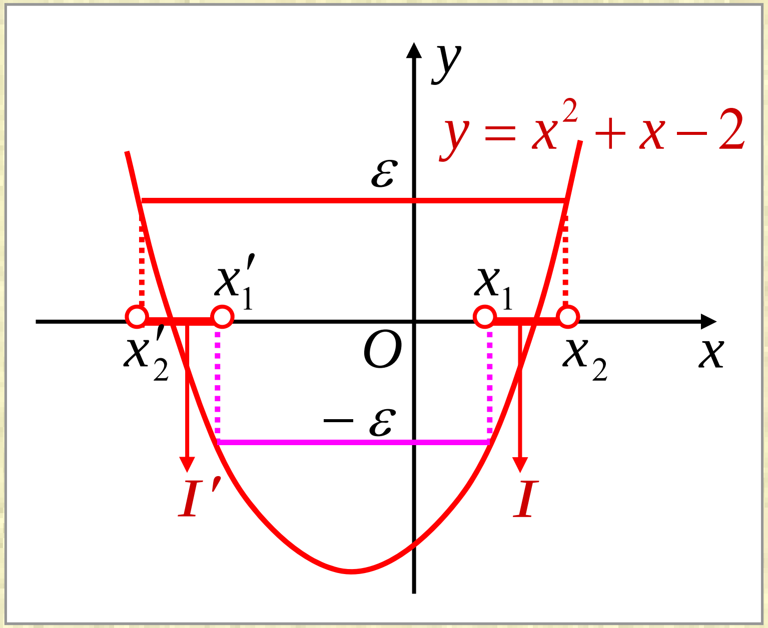
$x^2+x-2=-\varepsilon$ 的根为

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{9-4\varepsilon}}{2},$$

$$x_1'=\frac{-1-\sqrt{9-4\varepsilon}}{2}$$

解集为 $x\in I=(x_1,x_2)$

或 $x\in I'=(x_2',x_1')$



比较 $1-x_1$ 与 x_2-1 的大小：$x_2-1<1-x_1$

x_2 为 $x^2+x-2=\varepsilon$ 的正根

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{9+4\varepsilon}}{2}$$

x_1 为 $x^2+x-2=-\varepsilon$ 的正根

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{9-4\varepsilon}}{2}$$

$$x_2-1=\frac{\sqrt{9+4\varepsilon}-3}{2}=\frac{2\varepsilon}{\sqrt{9+4\varepsilon}+3}$$

$$\wedge$$

$$1-x_1=\frac{3-\sqrt{9-4\varepsilon}}{2}=\frac{2\varepsilon}{3+\sqrt{9-4\varepsilon}}$$