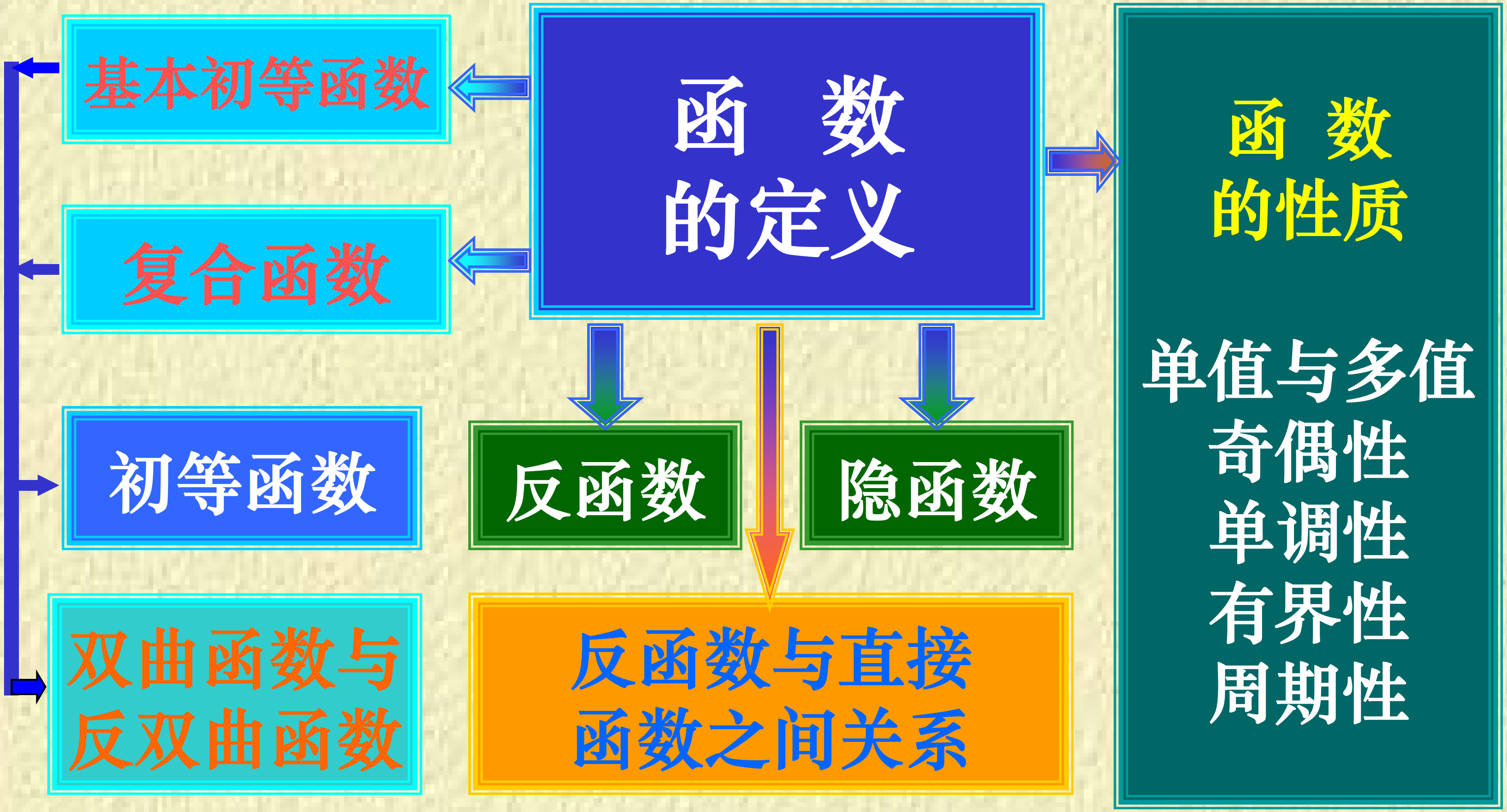
第一章 函数与极限

习 题 课

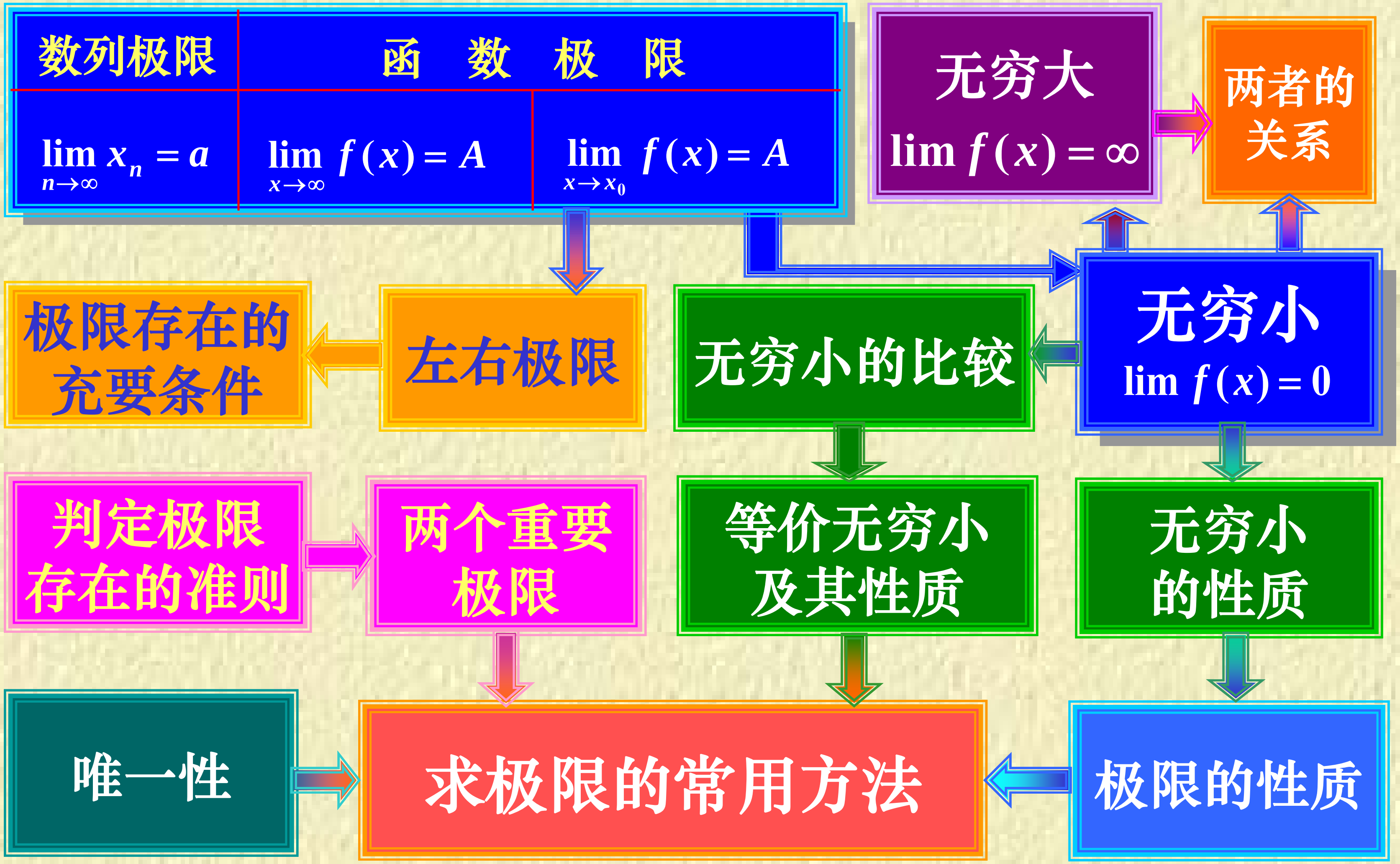
一、主要内容框图

二、典型例题

一、主要内容框图


基本初等函数
复合函数
初等函数
双曲函数与反双曲函数
函 数的定义
反函数
隐函数
反函数与直接函数之间关系
函 数的性质
单值与多值
奇偶性
单调性
有界性
周期性

一、主要内容框图


数列极限
函 数 极 限
$\lim_{n\to\infty} x_n = a$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$
$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$
无穷大
$\lim f(x) = \infty$
两者的关系
极限存在的充要条件
左右极限
无穷小的比较
无穷小
$\lim f(x) = 0$
判定极限存在的准则
两个重要极限
等价无穷小及其性质
无穷小的性质
唯一性
求极限的常用方法
极限的性质

一、主要内容框图

连 续 定 义

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

间断点定义

第一类	第二类
可去间断点	无穷间断点
跳跃间断点	振荡间断点

左右连续

连续的充要条件

在区间[a,b]上连续

连续函数的运算性质

闭区间上连续函数的性 质

初等函数的连续性

非初等函数的连续性

二、典型例题

例1 求函数$y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$的定义域.

解 $\begin{cases}16-x^2>0,\\ x-1>0,\\ x-1\neq 1,\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}|x|<4\\ x>1\\ x\neq 2\end{cases}$

$\Longrightarrow$ $1<x<2$及$2<x<4$,

即$(1,2)\cup(2,4)$.

例2 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x<1 \\ x, & x\ge 1 \end{cases}$, $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, & x<0 \\ x^2-1, & x\ge 0 \end{cases}$,

求 $f[\varphi(x)]$.

解 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1 \\ \varphi(x), & \varphi(x)\ge 1 \end{cases}=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1 \\ x+2, & -1\le x<0 \\ e^{x^2-1}, & 0\le x<\sqrt{2} \\ x^2-1, & x\ge\sqrt{2} \end{cases}$

分析: $x<0,\ \varphi(x)=x+2<1,\ \Longrightarrow\ x<-1;$

$x<0,\ \varphi(x)=x+2\ge 1,\ \Longrightarrow\ -1\le x<0;$

$x\ge 0,\ \varphi(x)=x^2-1<1,\ \Longrightarrow\ 0\le x<\sqrt{2};$

$x\ge 0,\ \varphi(x)=x^2-1\ge 1,\ \Longrightarrow\ x\ge\sqrt{2}.$

例3 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin 2\pi\sqrt{n^2+1}$

解 (1) $\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$

$$=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

$$=2\underbrace{\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}}_{\text{无穷小}}\underbrace{\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}}_{\text{有界}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$$

例3 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

(2) $\lim_{n\to\infty} n\sin 2\pi\sqrt{n^2+1}$

(2)分析:

$\sqrt{n^2+1}=n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$,

$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1\sim\frac{1}{2n^2}$,

$\sqrt{n^2+1}-n\sim\frac{1}{2n}$

解 (2) $\lim_{n\to\infty} n\sin 2\pi\sqrt{n^2+1}$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi\sqrt{n^2+1}-2n\pi)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\pi$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

❖**配 e 法** 设 $\lim u(x)=0,\ \lim v(x)=\infty$, 则有

$$\lim(1+u)^{v}=\lim[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{uv}=e^{\lim uv}.$$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}[1+\dfrac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}]^{\frac{1}{x^3}}$

$$\Theta \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{1}{2}}$.

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$\Longrightarrow$ 原式 $=1$

提示:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2+u}{1+u^4}=0,\quad (u=e^{\frac{1}{x}})$$

例6 确定常数 a, b，使 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-ax-b)=0$

解 令 $x=\dfrac{1}{t}$，原式化为

$$\lim_{t\to 0}\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{t^3}}-\frac{a}{t}-b\right)=0$$

即

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}-a}{t}=b$$

故 $\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt[3]{t^3-1}-a)=-1-a=0$

于是 $a=-1$，而

$$b=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}+1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-t^3}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{3}t^3}{t}=0$$

提示:

$\lim g(x)=0,\ \lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$

$\Longrightarrow \lim f(x)=\lim\dfrac{f}{g}\cdot g=0$

$(1+x)^\mu-1\sim\mu x$

例7 当 $x \to 0^+$ 时，$\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}$ 是 x 的几阶无穷小？

解 设其为 x 的 k 阶无穷小，则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=C\neq 0$$

因 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[6]{x}\sqrt[3]{\sqrt{x^3}+1}}{x^k}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[6]{x}}{x^k}$$

故 $k=\dfrac{1}{6}$

提示: $x^2+\sqrt{x}=\sqrt{x}(\sqrt{x^3}+1)\sim\sqrt{x}$

例8 设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \ln(b+x^2), & x>0 \end{cases}$

在 $x=0$ 连续，则 $a=$ __2__，$b=$ __e__.

提示: $f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{a(1-\cos x)}{x^2}=\dfrac{a}{2}$

$1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(b+x^2)=\ln b$

$$\frac{a}{2}=1=\ln b$$

例9 讨论 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, & |x|>1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\end{cases}$ 的连续性.

解 $$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 内连续.

当 $x=-1$ 时, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}(1-x)=2.$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi x}{2}=0.$$

$\because \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)\ne \lim\limits_{x\to -1^+} f(x),$ 故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 间断.

例9 讨论 $f(x)=\begin{cases}|x-1|, & |x|>1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & |x|\le 1\end{cases}$ 的连续性.

解 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-1\\ \cos\dfrac{\pi x}{2}, & -1\le x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$

当$x=1$时, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=f(1)=0.$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0.$

$\because \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$, 故$f(x)$在$x=1$连续.

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$连续.

例10 设函数 $f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x=0$ 及可去间断点 $x=1$，试确定常数 a 及 b .

解 Θ $x=0$ 为无穷间断点，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}(x-a)(x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}\cdot(e^x-b)=0$$

$$\Longrightarrow a=0$$

Θ $x=1$ 为可去间断点，$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$ 极限存在

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 1}(e^x-b)=0 \Longrightarrow b=\lim_{x\to 1}e^x=e$$

例11 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1\right).$

解 $\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1=\frac{\sqrt{n^2+i}-n}{n}=\frac{i}{n(\sqrt{n^2+i}+n)}$

$$\frac{i}{n(\sqrt{n^2+n}+n)}\le\frac{i}{n(\sqrt{n^2+i}+n)}<\frac{i}{2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n(\sqrt{n^2+n}+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(\sqrt{n^2+n}+n)}=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{4n}=\frac{1}{4}$$

由夹逼法得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$

例12 设$f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$，

证明必有一点$\xi\in[0,1]$使得$f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

证明 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$，则 $F(x)$在$[0,\frac{1}{2}]$上连续.

$$F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0),\quad F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})=-F(0).$$

讨论：若$F(0)=0$，则 $\xi=0$，$f(0+\frac{1}{2})=f(0)$；

若$F(0)\neq 0$，则 $F(0)\cdot F(\frac{1}{2})=-[F(0)]^2<0.$

由零点定理知，$\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$，使$F(\xi)=0$.

即 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$成立.

测 试 题

1. 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5}{5x^2+3}\ln(1+\dfrac{1}{x})$.

2. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2a}{x-a})^x=8$, 求 a 的值.

3. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x(e^x-1)}$.

4. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-x})$.

测 试 题

5. 计算 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$.

6. 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+Ax+B}{x-1}=3$，求 A, B.

7. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\le 0 \\ \dfrac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & 0<x<1 \end{cases}$，求 a 的值，

使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

测 试 题

8. 求 $f(x)=\arctan\frac{1}{x}+\frac{x-1}{\ln|x|}$ 的间断点，并判断其类型.

9. 求曲线 $y=\frac{x^2}{x-2}\sin\frac{1}{x}$ 的渐近线.

10. 设 $x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}\ (n=1,2,\Lambda\ )$.
试证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.