§1.10 函数的连续性与间断点

一、函数的连续性

二、函数的间断点

一、函数的连续性

❖函数的连续性定义1

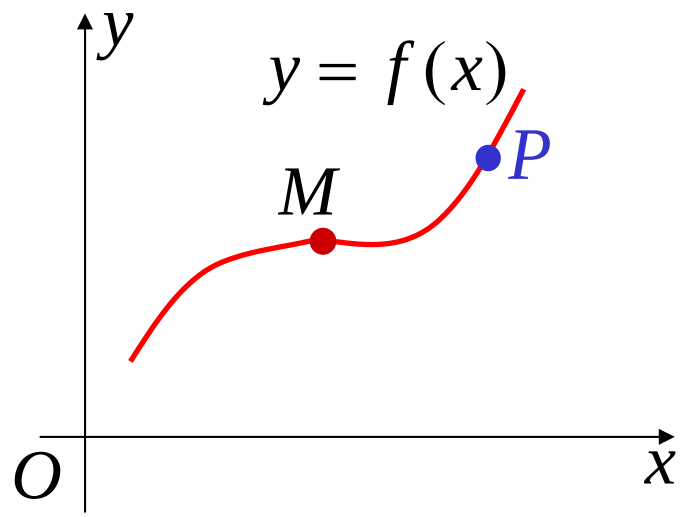
如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 那么称函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

分析:

点$M(x_0, f(x_0))$, 点$P(x, f(x))$.

当$x\to x_0$时:

$P\to M \quad \Leftrightarrow f(x)\to f(x_0)$.



一、函数的连续性

❖函数的连续性定义1

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

定义2 **设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时，对应的函数的增量 Δy 也趋向于零，即**

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0 \quad \text{或} \quad \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

记$\Delta x = x - x_0$,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$$

一、函数的连续性

❖函数的连续性定义

如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, 那么称函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

•左连续与右连续

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续.

如果 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

•结论

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续

$\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

❖连续函数

在区间上每一点都连续的函数，叫做在该**区间上的连续函数**，或者说函数在该区间上连续.

- 连续函数举例

例1. **多项式函数$P(x)$在区间$(-\infty, +\infty)$内是连续的.**

这是因为，函数$P(x)$在$(-\infty, +\infty)$内任意一点x_0处有定义，并且

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)\ .$$

注: 如果区间包括端点，那么函数在右端点连续是指左连续，在左端点连续是指右连续.

❖连续函数

在区间上每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数，或者说函数在该区间上连续.

•连续函数举例

例2. 函数y=sin x在区间$(-\infty, +\infty)$内是连续的.

这是因为，函数y=sin x在$(-\infty, +\infty)$内任意一点x处有定义，并且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[\sin(x+\Delta x)-\sin x]$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=0\,.$$

$$\boxed{\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}$$

例 3　试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在 $x=0$ 处连续.

证　$\because$　$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又　$f(0)=0,$

$\therefore$　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义知，　函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

二、函数的间断点

•间断点的定义

设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义.

如果函数$f(x)$在点x_0不连续, 则点x_0称为函数$f(x)$的不连续点或间断点.

分析: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$不成立:

(1) $f(x_0)$无定义;

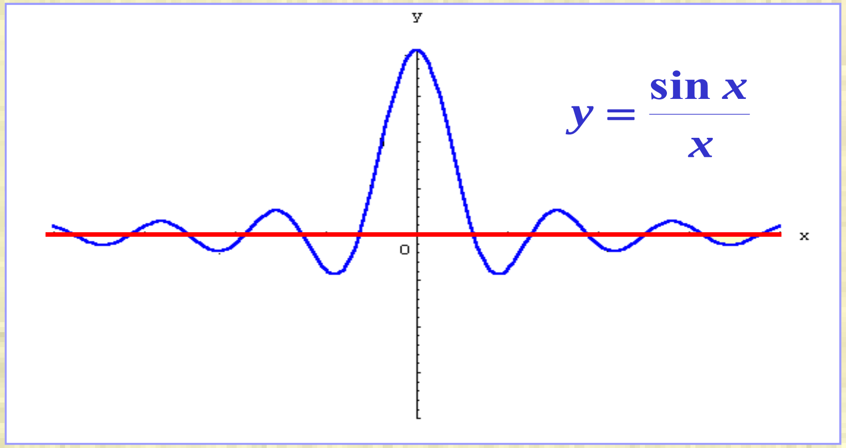
(2) $f(x_0)$有定义,但$\lim_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3) $f(x_0)$有定义,且$\lim_{x\to x_0} f(x)$存在,但两者不相等.

•间断点举例

例4 因为函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$在点$x=0$无定义,

所以点x=0是该函数的间断点.



因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,

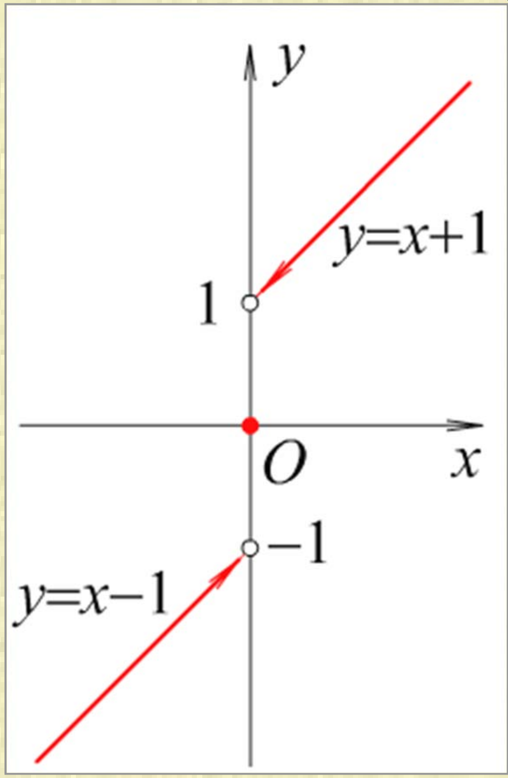
如果补充定义：令x=0时y=1,

则所给函数在x=0成为连续,

x=0称为该函数的可去间断点.

•间断点举例

例5 设函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1 & x>0 \end{cases}$.



因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

所以极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在, $x=0$ 是函数 $f(x)$的间断点.

因函数$f(x)$的图形在$x=0$处产生跳跃现象，我们称$x=0$为函数$f(x)$的跳跃间断点.

•间断点举例

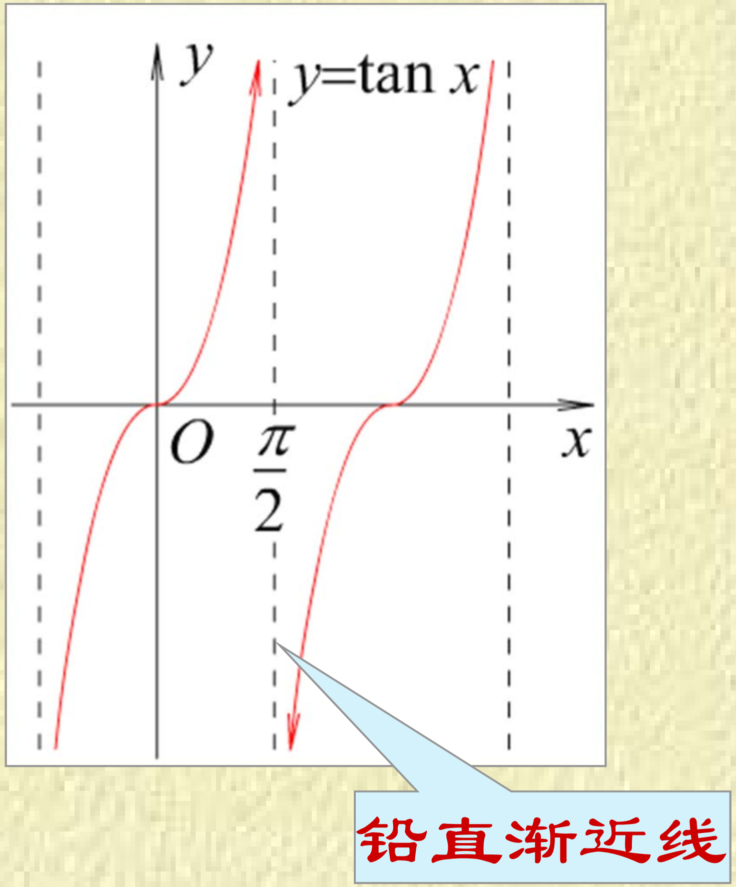
例6 正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处没有定义，

所以点 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $\tan x$ 的间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x=\infty$，

故称 $x=\dfrac{\pi}{2}$ **为函数** $\tan x$ **的**

无穷间断点.



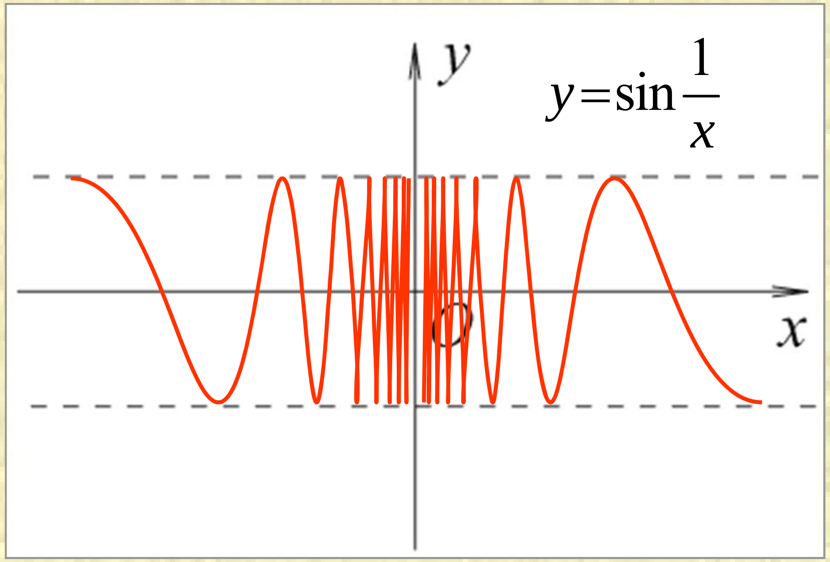
•间断点举例

例7 函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 没有定义，

所以点$x=0$是函数的间断点.

当$x\to 0$时，函数值在 -1与$+1$之间变动无限多次，

所以点$x=0$称为函数的**振荡间断点**.



❖间断点的类型

第一类间断点:

可去间断点、跳跃间断点.

第二类间断点:

无穷间断点、振荡间断点、及其它.

例 5 讨论 $f(x)=x+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-e^{nx}}{1+e^{nx}}$ 的连续性, 若有间断点, 指出其类型.

解 当$x<0$时, $0<e^{x}<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\lim\limits_{n\to\infty}(e^{x})^{n}=0$, $f(x)=x+1$;

当$x=0$时, $f(x)=0$;

当$x>0$时, $e^{x}>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\lim\limits_{n\to\infty}(e^{x})^{n}=\infty$, $f(x)=x-1$.

综上得 $$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ 0, & x=0, \\ x-1, & x>0 \end{cases}$$

注 当$|a|<1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}a^{n}=0$; 当$|a|>1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}a^{n}=\infty$.

例 5 讨论 $f(x)=x+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-e^{nx}}{1+e^{nx}}$ 的连续性, 若有间断点, 指出其类型.

解 当$x<0$时, $0<e^{x}<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\lim\limits_{n\to\infty}(e^{x})^{n}=0$, $f(x)=x+1$;

当$x=0$时, $f(x)=0$;

当$x>0$时, $e^{x}>1$, $\lim\limits_{n\to\infty}e^{nx}=\lim\limits_{n\to\infty}(e^{x})^{n}=\infty$, $f(x)=x-1$.

综上得 $$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1$,

所以$x=0$为$f(x)$的跳跃间断点, $f(x)$在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$内连续.

作 业

习题1–10 (P72):

4.(2)(4)

6.